Robustness of Equilibria to Incomplete Information: Basic idea and a leading example

梶井厚志　　京都大学経済研究所

Prepared for joint theory workshop at Otaru 060805

1 The email game:

プレーヤー2人： 1 and 2,

それぞれtwo actions, α and β, から一つ選ぶ.

ただし相手の選択はわからない

ゲームの利得環境は2つの可能性「Good」と「Bad」がある

“**G**ood” のとき：

		2	
		$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$
	$\boldsymbol{\alpha}$	**1, 1**	**0, −100**
1	$\boldsymbol{\beta}$	**−100, 0**	**10, 10**

注意点：

- 2つのナッシュ均衡： $\boldsymbol{\alpha\alpha}$ and $\boldsymbol{\beta\beta}$, しかし profile $\boldsymbol{\beta\beta}$ は $\boldsymbol{\alpha\alpha}$ よりも良い
- 一方, $\boldsymbol{\alpha}$ は “safer” な行動：なぜなら, 相手が等確率で $\boldsymbol{\alpha}$ あるいは $\boldsymbol{\beta}$ を選ぶときは, $\boldsymbol{\alpha}$ で対抗する方がよい

  (thus $\boldsymbol{\alpha\alpha}$ is “risk dominant”)

一方 “**B**ad” のときは

		2	
		α	β
1	α	1, 1	0, −100
	β	−100, 0	−1, 10

注意点：

- Player 2の利得環境は**G**のときと同一.
- Player 1　にとって，α は dominant
- よって，$\alpha\alpha$が唯一のナッシュ均衡

情報の構造：

- たいてい状況はGなのであるが，運悪く condition **B がごく小さな確率** ε （$> \mathbf{0}$）で起こることがあることが，両者ともに知られている．
- 一方，1はゲームの環境を知ることができる．すなわち，1はゲームがGであるかBであるかを知ったあとで自分の行動を選択できる．
- この事情は2もわかっているので，2人は連絡を取り合い，もしGならばよりよい均衡戦略を導く$\boldsymbol{\beta}$をともに選択したい．
- そこで，1はstate が **G** であれば,「Gですよ」と電子メールを**自動的に**発信することにした．

- １の立場からすると，メッセージが届いたかどうかを確認したい．そこで，２も，メッセージを受け取ったら「メッセージ受け取りました」という確認メールを**自動的に**返すことにした.
- その後も,『「メッセージの受領確認」の受領確認』などを，自動的に送りあうことにした.
- ところが，迷惑メール設定が完全でないので，確率δでメッセージは自動的に消去される．ただし，δ は非常に小さな数字である.

- さて，Player 2 は 100 のメッセージを受け取ったが，101回目の返信は来なかった．

問題： Player 2 は β を選ぶべきだろうか

分析の前に一言：

- 一つでもメッセージが受け取られれば，両者ともにゲームがGであることを**「知っている」**はず
- よって論点は，相手が「自分が知っていることを知っているか」など，お互いの知識がなす構造が，どのような影響をもつのかということ

Conditional on state **G**, which occurs with probability $(1-\varepsilon)$,

- player 2 は email　を確率 $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta})$ で受け取るが，確率 $\boldsymbol{\delta}$ で自動消去が起こって結果的にメールは一つも届かない
- player 1 には　probability $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta})^{\mathbf{2}}$ でメールがくるが，確率 $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta})$ で自動消去.
  - 後者の場合，2はメールを受け取ったのだが，それが1に伝わらない.
- player 2 には probability $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta})^{\mathbf{3}}$, で2通目のメール，probability $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta})^{\mathbf{2}}$ で自動消去
  - 後者の場合，1は2からのメールを受け取ったのだが，それが2に伝わらない.
- and so on....

これらの関係を以下のように表現しよう：

- $\boldsymbol{\omega} =$ メールが発信された回数
- 状態空間　$\boldsymbol{\Omega = \{0, 1, 2 \ldots\}}$
  - $\boldsymbol{\omega = 0}$ はゲームが **B** である（したがって，メールは発信されない）ことに対応.
  - $\boldsymbol{\omega = 1}$：　１がメールを発信するが，自動消去されたために2通目は発信されない
  - $\boldsymbol{\omega = 2}$：　１がメールを発信し，２に届いたので自動返信，ところがそれが自動消去されたために１から発信されるべき３通目は発信されない

情報構造

プレーヤー1： $\mathcal{Q}_1 = \{\{0\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots\}$;

プレーヤー2： $\mathcal{Q}_2 = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots\}$.

- たとえば，プレーヤー1は状態**1**と**2**は区別できない（どちらの場合も，自分は1通しかメールを出していないから）
- しかし$\{1, 2\}$なのか$\{3, 4\}$なのかは区別できる．前者はメールをちょうど1回だけ出したばあい，後者はちょうど2回だけ出した場合

利得:

$u_i(a_1, a_2, \omega) = g_i^G(a_1, a_2)$ for all $\omega \neq 0$;

$u_i(a_1, a_2, 0) = g_i^B(a_1, a_2)$

分析:

- もし$\omega = 0$であれば,（どのような均衡においても）player 1 は支配戦略であるα を選ぶ.
- player 2 の$\{0, 1\}$での行動を考える: メールは届いていない.
  - この状態になる確率は$\varepsilon + (1-\varepsilon)\delta$であり，メールが1通も届いていないという条件の下での条件付確率は B が $\frac{\varepsilon}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta}$ G が $\frac{(1-\varepsilon)\delta}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta}$.
  - player 1 は$\omega = 0$のときにはα を選ぶことは疑いない．これを勘案すれば，β を選択した場合の（条件付）期待利得は，**最大でも**:

$$-100 \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta} + 10 \times \frac{(1-\varepsilon)\delta}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta}$$

  - 一方で，α のほうは，**最悪でも**

$$1 \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta} + 0 \times \frac{(1-\varepsilon)\delta}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta}$$

– したがって，$\mathbf{1} \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta} + \mathbf{0} \times \frac{(1-\varepsilon)\delta}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta} > -\mathbf{100} \times \frac{\varepsilon}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta} + \mathbf{10} \times \frac{(1-\varepsilon)\delta}{\varepsilon+(1-\varepsilon)\delta}$ のときは，2 はどのような均衡においても，$\boldsymbol{\alpha}$ を選択しているはず.

– この不等式を整理すると：

$$\frac{\mathbf{101}}{\mathbf{10}} \frac{\varepsilon}{(\mathbf{1} - \varepsilon)} > \delta \tag{1}$$

- 次に $\{\mathbf{1,2}\}$ でのプレーヤー 1 を考える．メールを送ったものの返事がない．
  - $*$ そもそもメールが届いていない条件付確率は $\frac{(1-\varepsilon)\delta}{(1-\varepsilon)\delta+(1-\varepsilon)(1-\delta)\delta}=\frac{1}{2-\delta}$

    $*$ メールは届いたが，確認メールが自動消去されてしまう条件付確率は $\frac{(1-\varepsilon)(1-\delta)\delta}{(1-\varepsilon)\delta+(1-\varepsilon)(1-\delta)\delta}=\frac{1-\delta}{2-\delta}$
  - 一方で，(1) が満たされていれば，$\{\mathbf{0,1}\}$ において 2 は $\boldsymbol{\alpha}$ をえらぶはず．したがって，(1) が満たされている場合，$\boldsymbol{\beta}$ を選んだときの条件付期待利得は高々:

$$-100\times\frac{1}{2-\delta}+10\times\frac{1-\delta}{2-\delta}$$

  - それに対して $\boldsymbol{\alpha}$ は最低でも

$$1\times\frac{1}{2-\delta}+0\times\frac{1-\delta}{2-\delta}$$

– したがって

$$\mathbf{1} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{0} \times \frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{\delta}} > -\mathbf{100} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{10} \times \frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}}{\mathbf{2}-\boldsymbol{\delta}}$$

これを整理して

$$\mathbf{1} > -\mathbf{100} + \mathbf{10}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}) \tag{2}$$

であるなら，１は$\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$において（どのような均衡においても）$\boldsymbol{\alpha}$を選ぶ

– しかし (2) は常に満たされている.

- 問題の再帰性から，同様な議論を繰り返すことができる．

結論： 条件 (1) が満たされるのならば，いかなる均衡においても，$\omega > \mathbf{0}$ において行動 α が選ばれる．

したがって，101回目のメールが届かなかったならば，迷わず β を選ぶべき！

つまり，state **G** がlevel $\boldsymbol{k}$ of mutual knowledge,　まで確認しあえたとしても，

common knowledge ではないので，安心して $\boldsymbol{\beta}$ を選べないのである

さて，上の議論で鍵となった条件式(1)を再度ながめると：

$$\frac{\mathbf{101}}{\mathbf{10}}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{(\mathbf{1}-\boldsymbol{\varepsilon})}>\boldsymbol{\delta}$$

- 任意の $\boldsymbol{\varepsilon}>\mathbf{0}$, にたいして，ある（小さな） $\boldsymbol{\delta}$ が存在して (1) が成立する.
- つまり，the state **G** が起こる確率 $\mathbf{1}-\boldsymbol{\varepsilon}$ がどれだけ 1 に近くとも,（$\boldsymbol{\delta}$ に代表される）ある情報構造が存在して，いかなる均衡においても $\boldsymbol{\beta\beta}$ は選択されない.
- そこで，$\boldsymbol{\beta\beta}$ は「情報構造に対して頑健ではない」といいたい.

Kajii and Morris (1997, Econometrica) proposed the following concept:

- Fix a complete information game (like, game **G**).
- あるナッシュ均衡プロファイル $\boldsymbol{a}$ が *robust to incomplete information* であるとは，**すべての** nearby incomplete information game に，ある均衡が存在して，その均衡で選ばれる行動は $\boldsymbol{a}$ に近い.
  - "nearby" = same sets of players and actions. Same payoffs with probability close to one (ε is small - KM called such a game an ε- elaboration of the complete information game):
  - "behavior close to it" = induced action distributions are close

Why is this important?

- 完全情報ゲームは，分析のためのabstraction かつ simplification of real world
- 「現場のプレーヤー」たちは，微妙な情報の構造をもっているかもしれないが，それは捨象される
  - 微妙な情報構造に影響されるとすると，分析者の予想と現場の行動に乖離
- 情報構造に関して頑健であるような均衡では，その心配がない

実はthe email exampleにおいて，$\alpha\alpha$ は頑健であるということを示すことができる．

- 直感を得るために，前と対称的に議論してみる．仮に$\{2(k-1), 2k-1\}$において，２がβ を選択することが示せたとしよう．
- player 1の$\{2k-1, 2k\}$をみると，
- if he chooses α, payoff to action α is at most:

$$0 \times \frac{1}{2-\delta} + 1 \times \frac{1-\delta}{2-\delta}$$

  – while β is at worst

$$10 \times \frac{1}{2-\delta} - 100 \times \frac{1-\delta}{2-\delta}$$

– これを整理すると，**もしも** $\mathbf{1 - \boldsymbol{\delta} < 10 - 100\,(1 - \boldsymbol{\delta})}$ であれば，β を選ぶべき

– しかし，$\boldsymbol{\delta}$ が十分に小さければ，逆に $\mathbf{1 - \boldsymbol{\delta} > 10 - 100\,(1 - \boldsymbol{\delta})}$ となる．

– すなわち，nearby game において，この種の議論が成り立たない．

- 実際，$\omega = 0$をのぞいて，$\boldsymbol{\alpha}$ が選択されるという状況は，このゲームの均衡
- この場合，$\boldsymbol{\alpha a}$ は確率 $\mathbf{1} - \varepsilon$で生じるから，neaby gameにおいては$\boldsymbol{\alpha\alpha}$ という行動に近い行動を生み出す均衡がある．
- 問題はもっと複雑： そのような“$\boldsymbol{\alpha\alpha}$” 均衡が，どのような any nearby gamesにもあることを示さなければならない.
- KMの“critical path lemma”：もしも“$\boldsymbol{\alpha\alpha}$” 均衡が存在しないnearby game があれば，電子メールゲームと同様な情報構造をもつnearby gameで“$\boldsymbol{\alpha\alpha}$” 均衡が存在しないものが存在することを示した

- 実際，均衡が情報に関して頑健であることは，強い要求である．For instance, a strict Nash equilibrium (i.e. every player chooses a unique best response to each other) may not be robust. (different from refinement results)
- Some known sufficient conditions:

1. If a complete information game has a unique correlated equilibrium, then it is robust.
2. So called $(p_1, ..., p_I)$-dominant equilibrium with $p_1 + \cdots + p_I < 1$ is robust.
3. For so called a "potential game", a Nash equilibrium which maximizes the potential is robust

Formal definition (not to be covered in the talk)

- I players
- A_i: finite set of actions $A = \prod_i A_i$
- a complete information game $g = (g_i)_{i=1}^{I}$, $g_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$
- set of (countable) states Ω
- an incomepte information game: (u, P)
- Nearby incomplete information games:

  An ε- elaboration is:

  – $P[\Omega_{\mathcal{U}}] = 1 - \varepsilon$, where

$$\Omega_{\mathcal{U}} \equiv \left\{ \begin{array}{c} \omega : u_i(a, \omega') = g_i(a) \\ \text{for } \forall a \in A,\ \omega' \in Q_i(\omega),\ i \in \mathcal{I} \end{array} \right\}$$

– $\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{\mathcal{G}}, \boldsymbol{\varepsilon}\right)$: the set of all ε-elaboration.

- Equilibrium of $\boldsymbol{\mathcal{U}}$

– mixed strategy: $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_i$-meas function $\boldsymbol{\sigma}_i : \boldsymbol{\Omega} \longrightarrow \boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{A}_i)$.

– $\boldsymbol{\sigma} = \left(\boldsymbol{\sigma}_i\right)_{i \in \mathcal{I}}$ is a Bayesian Nash equilibrium if, for all $\boldsymbol{a}_i \in \boldsymbol{A}_i$ and $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\omega' \in Q_i(\omega)} \boldsymbol{u}_i\left(\boldsymbol{\sigma}\left(\omega'\right), \omega'\right) \boldsymbol{P}\left[\omega' | \boldsymbol{Q}_i\left(\omega\right)\right] \\ \geq & \sum_{\omega' \in Q_i(\omega)} \boldsymbol{u}_i\left(\left\{\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{\sigma}_{-i}\left(\omega'\right)\right\}, \omega'\right) \boldsymbol{P}\left[\omega' | \boldsymbol{Q}_i\left(\omega\right)\right]. \end{aligned}$$

– equilibrium action distribution $\boldsymbol{\mu}$:

$\boldsymbol{\mu}\left(\boldsymbol{a}\right) = \sum_{\omega \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{a} | \boldsymbol{\omega}\right) \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$, for some equil. $\boldsymbol{\sigma}$

- Definition of Robustness

– measure closeness of behavior by:

$$\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\nu}\| = \underset{a \in A}{Max} \, |\boldsymbol{\mu}(a) - \boldsymbol{\nu}(a)|$$

– action distribution $\boldsymbol{\mu}$ is robust to incomplete information in $\mathcal{G}$ if, for every $\delta > 0$, there exists $\bar{\varepsilon} > 0$ such that, for all $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, every $\mathcal{U} \in E(\mathcal{G}, \varepsilon)$ has an equilibrium action distribution $\boldsymbol{\nu}$ with $\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\nu}\| \leq \delta$.