北海道大学大学院経済学院

修士課程（博士コース，専修コース）入学試験

平成２９年度　専門科目　試験問題

試験期日：平成２９年１月２５日

試験時間：９時００分～１０時３０分

解答上の注意

１．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない.

２．問題は,

マクロ及びミクロ経済学	２～６ ページ
経済思想	７ ページ
統計学	８～１６ ページ
経営学	１７ ページ
会計学	１８ ページ
オペレーションズ・リサーチ	１９～２０ ページ

である.

３．問題冊子の中から出願時に選択した科目について解答しなさい.

４．受験番号，氏名，選択科目・分野名は，監督員の指示にしたがって解答用紙の指定された箇所に記入しなさい.

５．解答用紙に解答する際に，問題番号・記号があれば解答の前に必ず記入しなさい.

６．解答用紙が不足した場合には挙手して監督員に連絡しなさい.

７．試験場退出は試験開始 30 分が経過するまで認めない.

マクロ及びミクロ経済学

Macroeconomics and Microeconomics

（日本語問題文）（Japanese Version）

問題Ｉ，問題Ⅱの両方に解答しなさい．

問題Ｉ．以下の新古典派成長モデルを考える．

生産物の需給均衡式 $Y_t = C_t + I_t$，消費関数 $C_t = (1-s)Y_t$，貯蓄関数 $S_t = sY_t$

生産関数 $Y_t = 4K_t^{1/2}L_t^{1/2}$，投資 $I_t = K_{t+1} - K_t \equiv \Delta K_t$，労働の成長率 $\dfrac{\Delta L_t}{L_t} = n$，

ここで $\Delta L_t \equiv L_{t+1} - L_t$．恒常成長は $\dfrac{\Delta K_t}{K_t} = \dfrac{\Delta L_t}{L_t} = \dfrac{\Delta Y_t}{Y_t}$ が成立するときであると定義する．また，$y_t \equiv Y_t / L_t$，$k_t \equiv K_t / L_t$ とし，資本減耗はないものとする．

１．以下のすべての問いに答えなさい．

（１）生産関数の両辺を L_t で割り，$y_t = f(k_t)$ の形に書き直す．関数 $f(k_t)$ の式を具体的に導出しなさい．

（２）生産物の需給均衡式，消費関数，および貯蓄関数を用いて，$I_t = S_t$ が成立することを示しなさい．

（３）$k_t \equiv K_t / L_t$ より，$\dfrac{\Delta k_t}{k_t} = \dfrac{\Delta K_t}{K_t} - \dfrac{\Delta L_t}{L_t}$ が成立することを数学的に証明しなさい．さらに，この結果を用いて，恒常成長のとき k_t と y_t が時間を通じて一定になることを説明しなさい．

（４）以下の式が成立することを証明しなさい．

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{S_t}{K_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t}$$

２．恒常成長を考える．以下のすべての問いに答えなさい．

（１）上の１．（４）より，恒常成長のときの一人当り資本 k^* において

$$\frac{sf(k^*)}{k^*} = n$$

が成立することを示しなさい．

（２）いま，貯蓄率$s = 0.25$，労働の成長率$n = 0.01$とする．上の１．（１）で求めた$y_t = f(k_t)$ の式を用いて, 恒常成長のときの一人当り資本k^*の値を求めなさい．さらに，この恒常状態における一人当たりの生産量$f(k^*)$，貯蓄$sf(k^*)$，および消費$(1-s)f(k^*)$ を導出しなさい．

３．黄金律を考える．以下のすべての問いに答えなさい．

（１）一人当たり消費は，$f(k)-sf(k)$となることを示しなさい．さらに，上の２．（１）の結果より, 恒常成長k^*では一人当たり消費は$f(k^*)-nk^*$となることを示しなさい．

（２）恒常成長k^*の中で一人当たり消費を最大にする問題を考える．最適点$\hat{k}$ で$f'(\hat{k}) = n$が成立することを証明しなさい．

（３）いま，労働成長率は$n = 0.01$とし，上の１．（１）で求めた$y_t = f(k_t)$の式を用いる．このとき，一人当たり消費が最大になる$\hat{k}$と貯蓄率$\hat{s}$の値を求めなさい．さらに，このときの一人当たりの生産量$f(\hat{k})$，貯蓄$\hat{s}f(\hat{k})$，および消費$(1-\hat{s})f(\hat{k})$を導出しなさい．

問題Ⅱ．以下のすべての問題に答えなさい．

１．ある財の需要が，需要量 d, 価格 p として

$$d = 20 - p$$

で表わされるものとする．この市場に参入する企業の費用関数は同一であり, 総費用 c, 生産量 q として

$$c = q^2 + 2$$

で表わされるものとする．各企業は他の企業の生産量が与えられたものとして利潤が最大になるように自己の生産量を決定するものとする．

（１）市場に二つの企業が存在するものとする． その場合の各企業の生産量と利潤, 並びに財の均衡価格を求めなさい．

（２） 市場参入が自由に行われるとする．その場合の参入する企業の最大数を求めなさい．

２．企業の生産関数が，生産量 q，労働量 L, 資本量 Kとして

$$q = 2L^{1/4}(K-5)^{1/4} \qquad (K \geq 5)$$

で表わされ，賃金率が 1，資本賃貸率が 4 であるとする．企業は短期においては労働量を，長期においては資本量も変更することができるものとする．

（１）企業の短期費用関数及び長期費用関数を求めなさい．

（２）資本量が 10 の場合の短期の限界費用関数及び平均費用関数を求めなさい．

（英語問題文）（English Version）

Answer the following two questions, Question I and Question II.

Question I. Consider the neoclassical growth model below.

Equilibrium condition of goods market $Y_t = C_t + I_t$,

Consumption function $C_t = (1-s)Y_t$, Saving function $S_t = sY_t$,

Production function $Y_t = 4K_t^{1/2}L_t^{1/2}$, Investment $I_t = K_{t+1} - K_t \equiv \Delta K_t$,

The growth rate of labor $\dfrac{\Delta L_t}{L_t} = n$, where $\Delta L_t \equiv L_{t+1} - L_t$. Define a steady state by $\dfrac{\Delta K_t}{K_t} = \dfrac{\Delta L_t}{L_t} = \dfrac{\Delta Y_t}{Y_t}$. Let $y_t \equiv Y_t / L_t$, $k_t \equiv K_t / L_t$, and the depreciation rate be zero.

1. Answer all questions below.

(1) By dividing the production function through by L_t, we can rewrite it in the form of $y_t = f(k_t)$. Show the explicit formula of $y_t = f(k_t)$.

(2) By using the equilibrium condition of goods market, the consumption and the saving functions, show that $I_t = S_t$ holds.

(3) From $k_t \equiv K_t / L_t$, prove that we have $\dfrac{\Delta k_t}{k_t} = \dfrac{\Delta K_t}{K_t} - \dfrac{\Delta L_t}{L_t}$ mathematically. Furthermore, by using this result, explain that k_t and y_t are constant over time in a steady state.

(4) Prove that we have the following equations.

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{S_t}{K_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t}$$

2. Consider a steady state. Answer all questions below.

(1) From 1. (4) above, prove that

$$\frac{sf(k^*)}{k^*} = n$$

holds at the steady state level of capital per worker, k^*.

(2) Let saving rate $s = 0.25$ and the growth rate of labor $n = 0.01$. By using the formula of $y_t = f(k_t)$ derived in 1. (1) above, find the steady-state level of capital per worker k^* in this case. Furthermore, find output per worker $f(k^*)$, saving per worker $sf(k^*)$, and consumption per worker $(1-s)f(k^*)$ in this steady state.

3. Consider the Golden Rule. Answer all questions below.

(1) Show that consumption per worker is $f(k) - sf(k)$. Furthermore, from 2. (1) above, show that consumption per worker is $f(k^*) - nk^*$ in a steady state.

(2) Consider the maximization problem of consumption per worker among steady sates. Prove that we have $f'(\hat{k}) = n$ at the optimal point $\hat{k}$.

(3) Let the growth rate of labor $n = 0.01$, and use the formula of $y_t = f(k_t)$ derived in 1. (1) above. Then find the values of $\hat{k}$ and saving rate $\hat{s}$ at which consumption per worker is maximized. Furthermore, find output per worker $f(\hat{k})$, saving per worker $\hat{s}f(\hat{k})$, and consumption per worker $(1-\hat{s})f(\hat{k})$ in this case.

Question II. Answer the following all questions.

1. The demand of a good is given by

$$d = 20 - p$$

where d is the demand, and p the price. All firms in the market of this good have the same cost function, which is given by

$$c = q^2 + 2$$

where c is the total cost and q the amount of production. Each firm determines its amount of production to maximize its profit with the amounts of production by the other firms as given.

(1) Suppose that there are two firms in the market. Obtain the amounts of production and profit for the individual firms and also the equilibrium price.

(2) Suppose that firms enter the market freely. Obtain the maximum number of firms that enter the market.

2. The production function of a firm is given by

$$q = 2L^{1/4}(K-5)^{1/4} \qquad (K \geq 5)$$

where q is the amount of production, L the amount of labor, and K the amount of capital. The wage rate is 1, and the rental rate of capital is 4. The firm can adjust only the amount of labor in the short run, while it can change the amounts of both labor and capital in the long run.

(1) Obtain the short-run and long-run cost functions for the firm.

(2) Given that the amount of capital is 10, obtain the marginal and average cost functions in the short run for the firm.

経済思想

Economic Thought

（日本語問題文）（Japanese Version）
問題Ⅰ，問題Ⅱの<u>両方に</u>解答しなさい.

問題Ⅰ．ライオネル・ロビンズの経済学方法論を説明しなさい.

問題Ⅱ．J. シュンペーターの経済思想への貢献について説明しなさい.

（英語問題文）（English Version）
Answer the following <u>two</u> questions, Question I and Question II.

Question I. Explain Lionel Robbins's views on the methodology of economics.

Question II. Explain J. Schumpeter's contribution to economic thought.

統計学

Statistics

（日本語問題文）（Japanese Version）
問題Ⅰ，問題Ⅱのうちいずれか１問, 及び，問題Ⅲ，問題Ⅳのうちいずれか１問の合計２問を選んで解答しなさい.

問題Ⅰ．確率変数がパラメータ $\theta > 0$ の指数分布 $Exp(\theta)$ に従うとは，密度関数

$$f(x) = \begin{cases} \theta \exp(-\theta x), x \geq 0 \\ 0, \qquad\qquad その他 \end{cases}$$

を持つことである．以下のすべての問いに答えなさい.

１．指数分布 $Exp(\theta)$ の平均と分散を求めなさい.

２．指数分布 $Exp(\theta)$ から大きさ n の無作為標本 $X_1,\ldots,X_n$ を抽出して，統計量 $T_n = \min(X_1,\ldots,X_n)$ を考える．確率 $\Pr(T_n \geq x)$ を求めなさい．さらに，統計量 T_n の従う分布は何か答えなさい.

３．統計量 T_n の平均と分散を求めなさい.

問題Ⅱ．次の２つの条件 A，B を満たす確率変数 X と Y を考える.

A. 確率変数 X の周辺分布は，次の密度関数を持つガンマ分布に従う.

$$p(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx),\ x > 0$$

ここで，a と b は正の実数である．また，$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$ はガンマ関数であり，$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ が成り立つ.

B. 確率変数 X の値が X=x と与えられたときの確率変数 Y の条件付き分布は，次の確率関数を持つポアソン分布に従う.

$$p(y \mid x) = \frac{x^y \exp(-x)}{y!},\ y = 0,1,2,\ldots$$

以下のすべての問いに答えなさい.

１．平均 $\mathrm{E}(X)$，２乗の期待値 $\mathrm{E}(X^2)$，分散 $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい.

２．確率変数 Y の周辺確率関数 $p(y)$ を求めなさい．また，この確率関数を持つ確率分布の名前を書きなさい．

３．確率変数 Y の周辺分布から，平均 $\mathrm{E}(Y)$，$Y(Y-1)$ の期待値 $\mathrm{E}[Y(Y-1)]$，分散 $\mathrm{var}(Y)$ を求めなさい．

問題Ⅲ．次の回帰モデル(M)を考える．

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u},\ \mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$$

ここで，$\mathbf{y}$ は $n\times 1$ の被説明変数ベクトル，$\mathbf{X}$ はランクが k の $n\times k$ 説明変数行列，$\boldsymbol{\beta}$ は $k\times 1$ の係数ベクトル，$\mathbf{u}$ は $n\times 1$ の誤差項ベクトル，$\mathbf{0}$ は $n\times 1$ の零ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}^2$ は正のパラメータ，$\mathbf{I}_n$ は $n\times n$ 単位行列である．また，$\mathbf{u} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$ と書いたとき，誤差項ベクトル $\mathbf{u}$ が平均ベクトル $\mathbf{0}$，共分散行列 $\sigma^2\mathbf{I}_n$ の正規分布に従うことを示している．なお，n は観測値の数，k は定数項を含めた説明変数の数である．

正規分布に従う $n\times 1$ のベクトル $\mathbf{z} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ について，次の２つの定理が知られている．

定理１． $\mathbf{A}_1$ と $\mathbf{A}_2$ を $n\times n$ 対称行列とする．$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{O}$ ならば，２つの２次形式 $\mathbf{z}'\mathbf{A}_1\mathbf{z}$ と $\mathbf{z}'\mathbf{A}_2\mathbf{z}$ は統計的に独立である．

定理２． $\mathbf{B}$ を $m\times n$ 行列，$\mathbf{A}$ を $n\times n$ 対称行列とする．$\mathbf{BA} = \mathbf{O}$ ならば，１次形式 $\mathbf{Bz}$ と２次形式 $\mathbf{z}'\mathbf{Az}$ は統計的に独立である．

以下のすべての問いに答えなさい．

１．回帰モデル(M)について，$\boldsymbol{\beta}$ の最小２乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を求めなさい．

２．行列 $\mathbf{M}$ を $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ と定義する．このとき，$\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ 及び $\mathbf{MM} = \mathbf{M}$ を示しなさい．このような性質を持つ行列を対称べき等行列という．

３．残差ベクトル $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ について，$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{My} = \mathbf{Mu}$ を示しなさい．

４．残差２乗和 $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ と最小２乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ が統計的に独立であることを示しなさい．

５．$\mathbf{z} \sim \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ とし，$\mathbf{A}$ をランクが m の対称べき等行列とするとき，$\mathbf{z}'\mathbf{Az} \sim \chi^2_m$（自由度 m のカイ２乗分布に従う）ということが知られている．対称べき等行列のランクはその行列のトレースに等しいことも知られている．これらの事実を用いて，$\dfrac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{\sigma^2}$ の従う分布を求めなさい．

６. 係数ベクトル$\boldsymbol{\beta}$に関する線型制約$\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{r}$を考える．ここで，$\mathbf{R}$は既知の$q\times k$行列で，そのランクは$q\ (<k)$とする．また，$\mathbf{r}$は既知の$q\times 1$ベクトルである．回帰モデル(M)について，$\boldsymbol{\beta}$の制約付最小２乗推定量$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$を求めなさい．

７．制約付最小２乗推定量$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$に基づく残差ベクトルを$\tilde{\mathbf{u}}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}$とする．このとき，$\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}}\geq\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$を示しなさい．

８．帰無仮説を$H_0:\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{r}$として，この帰無仮説が正しいとする．

（１）$\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$と$\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$が統計的に独立であることを示しなさい．

（２）$\dfrac{\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{\sigma^2}$の従う分布を求めなさい．

（３）帰無仮説$H_0:\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{r}$を検定するための検定統計量$\dfrac{(\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}}-\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}})/q}{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}/(n-k)}$の従う分布を求めなさい．

問題Ⅳ．次の潜在変数モデルを考える．

$$Y_i^*=\beta_1+\beta_2 x_i+U_i, i=1,\ldots,n$$

ただし，説明変数$x_1,\ldots,x_n$は固定された値を持つが，確率変数$U_1,\ldots,U_n$は互いに独立で密度関数$\dfrac{\exp(t)}{\{1+\exp(t)\}^2}$を持つ分布に従うとする．以下の<u>すべての</u>問いに答えなさい．

１．$p(x_i)=\Pr(Y_i^*>0)$とおく．

（１）積分$\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{\exp(t)}{\{1+\exp(t)\}^2}dt$を求めなさい．

（２）$p(x_i)$と$1-p(x_i)$を求めなさい．

（３）対数オッズ$\log Odds(x_i)=\log\dfrac{p(x_i)}{1-p(x_i)}$を求めなさい．

（４）限界効果$\dfrac{d}{dx_i}p(x_i)$を求めなさい．

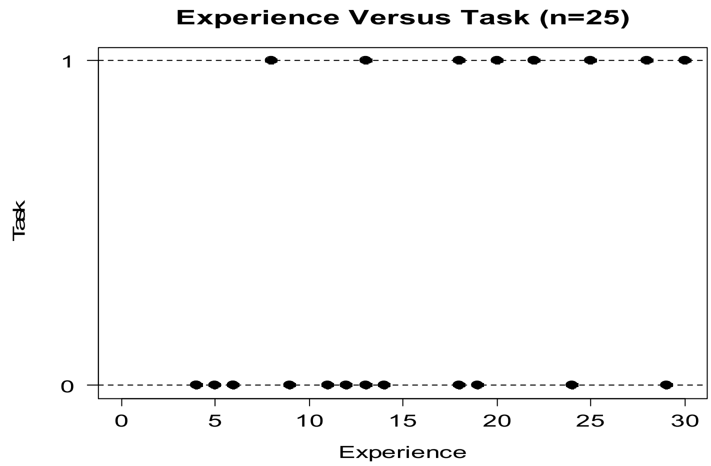
２．変数$Y_i^*, i=1,\ldots,n$は直接観測できないが，「$Y_i^*>0$か$Y_i^*\leq 0$」は観測できるとする．

（１）$Y_i^*>0$のとき$Y_i=1$, $Y_i^*\leq 0$のとき$Y_i=0$として定義される確率変数Y_iの従う確率分布の名前を書きなさい．

（２）係数β_1とβ_2を推定する方法について，適切なキーワードを用いて説明しなさい．

（３）表１は，２５名のプログラマーの仕事の成功・失敗(被説明変数 “Task”)を，経験値(説明変数 “Experience”)で説明するため，ソフトウェア R を使用して上述のモデルで分析した結果の抜粋である．なお，図１は，Experience と Task の散布図である．

図１



１）表１にて，説明変数 Experience の係数β_2の z 値と p 値をそれぞれz_2，p_2とおく．z_2はどのような帰無仮説 H を検定するための検定統計量の実現値か．帰無仮説 H を書きなさい．また，p_2を計算する際の対立仮説 A を書きなさい．

２） p 値から，係数β_2に関する仮説検定の結果を述べなさい．

３）係数β_2の９５％信頼区間を求めなさい．ただし，1.96 という数値を使用すること．

４）説明変数が Experience=10 のとき$\log Odds(10)$を求めなさい．

表１

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)	
(Intercept)	-3.060	1.259	-2.43	0.015	*
Experience	0.162	0.065	2.49	0.013	*

（英語問題文）（English Version）

Answer <u>either</u> of the following two questions, Question I and II, and <u>either</u> of the following two questions, Question III and IV.

Question I.　The exponential distribution, denoted by $Exp(\theta)$, has the following density:

$$f(x)=\begin{cases}\theta\exp(-\theta x), x\geq 0\\ 0, \qquad \text{otherwise,}\end{cases}$$

where $\theta>0$ is the parameter. Answer each of the following questions.

1. Find the mean and variance of the exponential distribution $Exp(\theta)$.
2. Let $X_1,\ldots,X_n$ be a random sample of size n from the exponential distribution $Exp(\theta)$. Consider the statistic $T_n=\min(X_1,\ldots,X_n)$. Find the probability $\Pr(T_n\geq x)$. Further, what is the sampling distribution of T_n?
3. Find the mean and variance of the statistic T_n.

Question II. Consider two random variables X and Y under the following two conditions A and B.

A. The marginal distribution of X is a gamma distribution with the density function

$$p(x)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}\exp(-bx),\ \ x>0,$$

where a and b are positive real numbers. Here, $\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ is a gamma function, which satisfies the relation $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$.

B. Given X=x, the conditional distribution of Y is a Poisson distribution with the probability function

$$p(y\mid x)=\frac{x^y\exp(-x)}{y!},\ \ y=0,1,2,\ldots$$

Answer <u>each</u> of the following questions.

1. For the random variable X, derive the mean $\mathrm{E}(X)$, the expected value of X^2, denoted by $\mathrm{E}(X^2)$, and the variance $\mathrm{var}(X)$.
2. Derive the probability function $p(y)$ of the marginal distribution of Y. Further, state the name of distribution with this probability function.
3. From the marginal distribution of Y, derive the mean $\mathrm{E}(Y)$, the expected value of $Y(Y-1)$, denoted by $\mathrm{E}[Y(Y-1)]$, and the variance $\mathrm{var}(Y)$.

Question III. Consider the following regression model (M):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u},\ \mathbf{u} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n),$$

where $\mathbf{y}$ is a vector of explained variable, $\mathbf{X}$ is an $n \times k$ matrix with rank k of explanatory variables, $\boldsymbol{\beta}$ is a $k \times 1$ vector of coefficient parameters, $\mathbf{u}$ is an $n \times 1$ vector of error terms, $\mathbf{0}$ is an $n \times 1$ zero vector, σ^2 is a positive parameter, and $\mathbf{I}_n$ is an $n \times n$ identity matrix. Further, $\mathbf{u} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ means that the error vector $\mathbf{u}$ is normally distributed with mean vector $\mathbf{0}$ and covariance matrix $\sigma^2 \mathbf{I}_n$. In addition, n is the number of observations, and k is the number of explanatory variables including the constant term.

We have the following two theorems about the statistics based on $\mathbf{z} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$.

Theorem 1. Let $\mathbf{A}_1$ and $\mathbf{A}_2$ be $n \times n$ symmetric matrices. If $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{O}$, then, the two quadratic forms $\mathbf{z}'\mathbf{A}_1\mathbf{z}$ and $\mathbf{z}'\mathbf{A}_2\mathbf{z}$ are statistically independent.

Theorem 2. Let $\mathbf{B}$ be an $m \times n$ matrix, and $\mathbf{A}$ be an $n \times n$ matrix. If $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{O}$, then, the linear form $\mathbf{B}\mathbf{z}$ and the quadratic form $\mathbf{z}'\mathbf{A}\mathbf{z}$ are statistically independent.

Answer <u>each</u> of the following questions.

1. For the regression model (M), derive the least squares estimator of $\boldsymbol{\beta}$, denoted by $\hat{\boldsymbol{\beta}}$.
2. Define a matrix $\mathbf{M}$ as $\mathbf{M} = \mathbf{I}_n - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$. Show that $\mathbf{M}' = \mathbf{M}$ and $\mathbf{M}\mathbf{M} = \mathbf{M}$. Such a matrix is referred as symmetric and idempotent.
3. Define the residual vector as $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Show that $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{u}$.
4. Show that the residual sum of squares $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ and the least squares estimator $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ are statistically independent.
5. If $\mathbf{z} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ and $\mathbf{A}$ is a symmetric idempotent matrix with rank m, then, $\mathbf{z}'\mathbf{A}\mathbf{z}$ is distributed as the chi-squared with degrees of freedom m, i.e., $\mathbf{z}'\mathbf{A}\mathbf{z} \sim \chi^2_m$. Further, the rank of symmetric idempotent matrix is

equal to its trace. Using these facts, derive the distribution of $\dfrac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{\sigma^2}$.

6. Consider the linear constraints of $\boldsymbol{\beta}$, $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$, where $\mathbf{R}$ is a known $q \times k$ matrix with rank $q\ (< k)$ and $\mathbf{r}$ is a known $q \times 1$ vector. For the regression model (M), derive the restricted least squares estimator of $\boldsymbol{\beta}$, denoted by $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$.

7. Define the residual vector based on the restricted least squares estimator $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ as $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}}$. Then, show that $\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}} \geq \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$.

8. Consider the null hypothesis $H_0 : \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$. Suppose that the null hypothesis is true.

(1) Show that $\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ and $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ are statistically independent.

(2) Derive the distribution of $\dfrac{\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{\sigma^2}$.

(3) Define the test statistic for the null hypothesis as $\dfrac{(\tilde{\mathbf{u}}'\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}})/q}{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}/(n-k)}$. Derive the distribution of this test statistic.

Question IV. Consider the following latent variable model:

$$Y_i^* = \beta_1 + \beta_2 x_i + U_i, i = 1, \ldots, n.$$

Here, the variables $x_1, \ldots, x_n$ are fixed, and the random variables $U_1, \ldots, U_n$ are independently distributed according to the distribution having the density $\dfrac{\exp(t)}{\{1+\exp(t)\}^2}$. Answer <u>each</u> of the following questions.

1. Write $p(x_i) = \Pr(Y_i^* > 0)$.

(1) Find the integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{\exp(t)}{\{1+\exp(t)\}^2} dt$.

(2) Find $p(x_i)$ and $1 - p(x_i)$.

(3) Find the log odds $\log Odds(x_i) = \log \dfrac{p(x_i)}{1-p(x_i)}$.

(4) Find the marginal effect $\frac{d}{dx_i} p(x_i)$.

2. Suppose that the variables $Y_i^*, i = 1, \ldots, n$ are not observable, and, instead, consider the situation where we observe $Y_i^* > 0$ or $Y_i^* \le 0$.

(1) Define the following random variable:

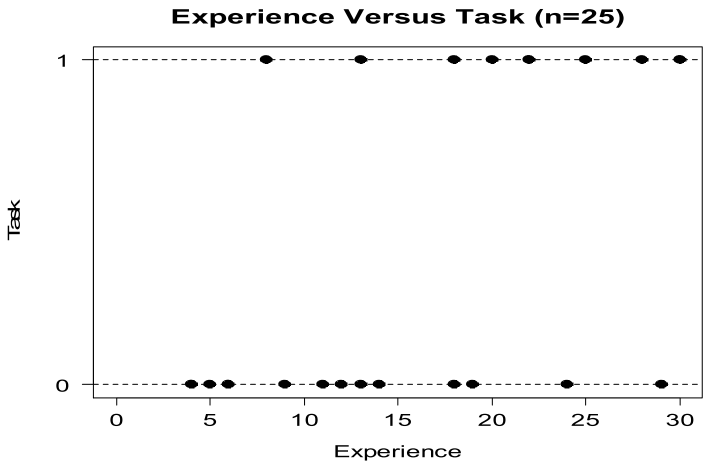
$$Y_i = \begin{cases} 1, Y_i^* > 0 \\ 0, Y_i^* \le 0. \end{cases}$$

State the name of the distribution of Y_i.

(2) Explain how to estimate the coefficients β_1 and β_2 by using appropriate keywords.

(3) The following Table 1 is the result using the statistical software R, where the explanatory variable "Experience" is used to explain the success or failure (the explained variable "Task") of the programmer's task $(n = 25)$. Here, Figure 1 is the scatter plot of Experience and Task.

Figure 1



1) Denote by β_2 the coefficient of the variable "Experience". In Table 1, let z_2 and p_2 be, respectively, the z value and p value of β_2. Specify the null hypothesis H tested by the realized value z_2. Further, which alternative hypothesis A is assumed for computing p_2?

2) According to the p value, make a conclusion about the coefficient β_2.

3) Find the 95% confidence interval of the coefficient β_2 (for this, you must use "1.96").

4) Find the log odds $\log Odds(10)$ at Experience=10.

Table 1

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(>|z|)	
(Intercept)	-3.060	1.259	-2.43	0.015	*
Experience	0.162	0.065	2.49	0.013	*

経営学

Management and Business Administration

（日本語問題文）（Japanese Version）
問題Ⅰ，問題Ⅱの両方に解答しなさい．

問題Ⅰ．消費者行動におけるバラエティ・シーキングについて，

（１）バラエティ・シーキングとは何かを定義しなさい．

（２）バラエティ・シーキングを生み出す消費者行動の条件について論じなさい．

（３）バラエティ・シーキングに有効なマーケティング戦略について論じなさい．

問題Ⅱ．「イノベーター(イノベーション)のジレンマ」について説明しなさい．

（英語問題文）（English Version）
Answer the following two questions, Question I and Question II.

Question I. Answer the following three questions about variety seeking buying behavior,

(1) Define variety seeking buying behavior.

(2) Explain the condition of variety seeking buying behavior.

(3) Explain what kind of marketing strategy is useful for variety seeking buying behavior.

Question II. Explain “Innovator’s Dilemma”.

会計学
Accounting

（日本語問題文）（Japanese Version）

問題Ｉと問題Ⅱの中から1問を選択して解答しなさい.

問題Ｉ．源泉別分類に基づいて資本を説明しなさい.

問題Ⅱ．ジャスト・イン・タイム生産方式の特徴を説明しなさい.

（英語問題文）（English Version）

Answer one of the following two questions, Question I and Question II.

Question I. Explain Capital, based on the classification according to the source.

Question II. Explain the major features of the just-in-time (JIT) production systems.

オペレーションズ･リサーチ

Operations Research

問題Ｉ，問題IIの両方に解答しなさい.

問題Ｉ．以下の２つの問いに答えなさい.

１．　次の線形計画問題(P)を単体法で解きなさい.

$$
\begin{array}{lll}
\text{問題(P)} & \max & 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\
 & \text{subject to :} & \\
 & & x_1 - x_2 \qquad = 6 \\
 & & 3x_1 \qquad + x_3 \le 12 \\
 & & x_1, x_3 \ge 0
\end{array}
$$

２．　問題(P)の第一制約の右辺の値を 6 から 6+t に変更した問題(P1)を考える．問題(P)の最適解における任意の基底変数が，問題(P1)の最適解においても基底変数であるような t の値の範囲を求めなさい.

問題II．以下のすべての問いに答えなさい.

１．　株主と債権者の違いについて，説明しなさい.

２．　現時点を 0 とし，半年後からスタートする金利スワップを考える．想定元本は 100 万円とし，利払いは 1 年後，1 年半後，2 年後に行なわれるとするとき，スワップレート R を求めなさい．ただし，満期 n の割引国債の現時点の価格を $v(0,n)$とする.

３．　割引国債の利回りが r で，株価 S がパラメータ u,d,p の二項モデルに従うとき，リスク中立確率を導出しなさい.

Answer the following two questions, Question I and Question II.

Question I. Answer the following all questions.

1. Solve the following linear programming problem (P) using the simplex method.

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\ \ \max\ & 4x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{subject to:}\ & \\
& x_1 - x_2 = 6 \\
& 3x_1 + x_3 \le 12 \\
& x_1, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

2. Consider the problem (P1) obtained from (P) by replacing the right-hand side of the first constraint with 6+t. Determine the range of values of t over which each basic variable in the optimal solution for (P) remains a basic variable in the optimal solution for (P1).

Question II. Answer the following all questions.

1. Describe the difference between shareholders and bondholders.
2. Set the current time $t = 0$ and consider the interest swap starting from $t = 0.5$. Derive the swap rate R if the notional principal is 1 million yen and coupons are paid at $t = 1, 1.5, 2$. Let the price of discount government bond with maturity n be $v(0,n)$.
3. Assume the yield rate of discount government bond r, and the stock price S follows a binomial model with parameters u, d, p. Then derive the risk neutral probability.