問題 I の解答

1. (1) 生産関数 $Y_t = 4K_t^{1/2}L_t^{1/2}$ を L_t で割り， $y_t = 4k_t^{1/2}$

(2) $S_t = sY_t = Y_t - C_t = I_t$

(3) $k_t \equiv K_t / L_t$ より，log をとり， $\log k_t = \log K_t - \log L_t$． t で微分して，

$\frac{\Delta k_t}{k_t} = \frac{\Delta K_t}{K_t} - \frac{\Delta L_t}{L_t}$． 恒常状態のとき， $\frac{\Delta k_t}{k_t} = 0$． よって， k_t は時間を通じて一定． $y_t = f(k_t)$ より， y_t も一定．

(4) 等式は、$\Delta K_t = I_t$， $I_t = S_t$， $S_t = sY_t$ より成立する．次に，分子と分母を L_t で割り， $y_t = f(k_t)$ から

$$\frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{sy_t}{k_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t}$$

2. (1) 上記の問い 1. (4) より，

資本の成長率は $\frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{sf(k_t)}{k_t}$， 労働の成長率は $\frac{\Delta L_t}{L_t} = n$

恒常成長では， $\frac{\Delta K_t}{K_t} = \frac{\Delta L_t}{L_t}$ より， $\frac{sf(k_t)}{k_t} = n$．

(2) $\frac{sf(k_t)}{k_t} = n$ に $f(k_t) = 4k_t^{1/2}$， $s = 0.25$， $n = 0.01$ を代入し整理すると $1/k_t^{1/2} = 0.01$． k_t を求めると $k^* = 10{,}000$． このとき， 1 人当たりの生産量 $f(k^*) = 4k^{*1/2} = 400$，貯蓄 $sf(k^*) = 100$， 消費 $(1-s)f(k^*) = 300$．

3. (1) $C_t = (1-s)Y_t$ より， L_t で両辺を割って得られる．さらに，問い 2. (1) より，恒常状態では $sf(k_t) = nk_t$ が成立するので，結果を得る．

(2) $f(k^*) - nk^*$ を k^* に関して微分し， $f'(\hat{k}) = n$ を得る．

(3) $f'(\hat{k}) = n$ を用いる． $f'(k) = 2k^{-1/2}$ より， $2\hat{k}^{-1/2} = 0.01$． これを解き，$\hat{k} = 40{,}000$． $f(\hat{k}) = 4\hat{k}^{1/2} = 800$． 恒常状態では $sf(k_t) = nk_t$ が成立するので，$800\hat{s} = 0.01 \times 40{,}000$． よって，貯蓄率 $\hat{s} = 0.5$． 一人当たりの生産量は $f(\hat{k}) = 800$，貯蓄 $sf(\hat{k}) = 400$，および消費 $(1-s)f(\hat{k}) = 400$．

マクロ及びミクロ経済学

出題の趣旨・解答例

問題Ⅱ

１.

企業数を n として、企業の利潤は

$\pi_j = pq_j - c_j = (20 - \sum q_i)\, q_j - q_j^2 - 2$

利潤最大化の条件

$\partial \pi_j/\partial q_j = (20 - \sum q_i) - q_j - 2q_j = 0$

上の式が全ての j について成立し、全ての企業は同様の状況にあるから $q_1 = q_2 \ldots = q_n$ である。したがって、各企業の生産量は

$q_j = 20/(n+3) \quad (j = 1,\ldots,n)$

そのときの企業の利潤は

$\pi_j = (20 - 20n/(n+3)) \times 20/(n+3) - 400/(n+3)^2 - 2$

$\quad = 800/(n+3)^2 - 2 \qquad (j = 1,\ldots,n)$

（１）n = 2 のとき

生産量　$q_j = 20/(2+3) = \underline{4}$

利潤　$\pi_j = (20 - 20n/(n+3)) \times 20/(n+3) - 400/(n+3)^2 - 2$

$\quad = 800/(5+3)^2 - 2 = \underline{30}$

均衡価格　$p = 20 - 2 \times 4 = \underline{12}$

（２）利潤が非負である限り企業は参入するので

$\pi_j = 800/(n+3)^2 - 2 \geq 0$

$17 \geq n$

<u>最大 17 個の企業が参入する</u>。

２.

（１）

生産関数を変形し L について解くと

$L = q^4/[16\times(K - 5)]$

企業の総費用は

$c = L + 4\times K = \underline{q^4/[16\times(K-5)] + 4K}$　　（１）

これが短期費用関数。

長期においては企業は K の値も変更できる。上式を K について最小するものが長期費用関数。最小化の条件は

$\partial c/\partial K = -q^4/[16\times(K-5)^2] + 4 = 0$

これより

$K = q^2/8 + 5$

これを上の費用関数に代入し、下の長期費用関数を得る。

$c = q^4/[16\times(q^2/8 + 5 - 5)] + 4\times(q^2/8 + 5) = \underline{q^2 + 20}$

（２）

資本量が 10 の場合の短期費用関数は

$c = q^4/[16\times(10-5)] + 4\times 10 = q^4/80 + 40$

短期限界費用 SMC と平均費用 SAC は

$SMC = dc/dq = \underline{q^3/20}$

$SAC = c/q = \underline{q^3/80 + 40/q}$

経済思想

Economic Thought

出題の趣旨・解答例

問題 I

経済思想史に関する基本的な知識を問う問題である。ライオネル・ロビンズは経済学方法論の歴史において重要な位置を占める．その第一の貢献は，経済学の「稀少性定義」を提唱し，経済学の課題と領域について有力な提案を行ったことにある.第二に,いわゆる経済人あるいは経済的行為の規定を転換させた.経済的行為というとき，19 世紀の方法論においては，動機あるいは目的が重視されていた.これに対してロビンズは,経済的行為の概念にとって重要なのは,利己心でも富の動機でもなく，さまざまな選択肢の相対的評価ということであり,目的を達成するために合理的に選択を行うということである,と主張した.第三に，ロビンズは「効用の個人間比較」が可能であると考えたピグーを批判した．第四に，事実と価値を峻別するとともに，両者の関連について論じた．第五に，経済法則・理論の性格に関して，アプリオリズムあるいは本質主義などと呼ばれる立場を取った.

This is a question about fundamental knowledge in the history of economic thought. Lionel Robbins is in an important position in the history of the economic methodology. The first contribution is to advocate the “scarcity definition of economics” and to offer an influential view on subject and scope of economics. Second, he changed definitions of so-called economic man or economic action. As for economic action, motives or ends were emphasized in the 19th century. On the contrary, Robbins insists that what is important for the concept of economic action is neither self-interest nor motive for wealth, but relative evaluation about options and rational choice among them to realize ends. Third, he criticized A.C. Pigou, who had considered “interpersonal comparisons of utility” possible. Fourth, he distinguished fact from value and argued their relations. Fifth, concerning economic laws and theories he supported a priorism or essentialism.

（問題本文は記載不要．出題の趣旨は２００～４００字程度で記載してください.）

問題Ⅱ

経済思想の基本的な知識を問う問題である。シュンペーターは、20 世紀を代表する経済学者であり、その貢献は思想の面においても広範な影響をもたらした。企業家精神と景気循環、資本主義と社会主義と民主主義のダイナミックな関係、社会科学の方法論、新古典派経済学の理論的貢献に関する理解、などにおいて、シュンペーターは独自の見解を示し、その議論はさまざまな後続の発展的な研究を促した。かかる事情について、本問いでは、歴史的な理解と思想的な理解の両方の側面からの応答を求めている。

This question asks basic knowledge on J. Schumpeter's contribution to the field of economic thought. Schumpeter is apparently one of the greatest figure of economics in 20th century and his contribution is vast even in the field of economic thought. For example, in such topics on entrepreneurship and business cycle, capitalism, socialism and democracy, methodology of social sciences, understanding of neoclassical economics and so forth, Schumpeter brought his original idea and perspective. His contribution has been succeeded and developed in various fields. In this question, answers are required both in terms of historical and philosophical perspectives.

Statistics(統計学)・解答例

I.

１．平均 $1/\theta$, 分散 $1/\theta^2$

２．$\exp(-n\theta x)\ (x>0), \quad T_n \sim \mathrm{Exp}(n\theta)$

３．平均 $1/(n\theta)$, 分散 $1/(n\theta)^2$

問題 II.

1.

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a}{b},\ \mathrm{E}(X^2) = \frac{a(a+1)}{b^2},\ \mathrm{var}(X) = \frac{a}{b^2}$$

2.

$$p(y) = \frac{\Gamma(a+y)}{y!\Gamma(a)} \left(\frac{b}{b+1}\right)^a \left(\frac{1}{b+1}\right)^y$$

負の二項分布.

3.

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{a}{b},\ \mathrm{E}[Y(Y-1)] = \frac{a(a+1)}{b^2},\ \mathrm{var}(Y) = \frac{a(b+1)}{b^2}$$

問題 III.

1. $\boldsymbol{\beta}$ の任意の推定量を $\boldsymbol{b}$ とする．残差 2 乗和 $Q(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})$ を最小にするための必要条件は $\dfrac{\partial Q(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}$ である．

   $$\frac{\partial Q(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}$$

   となる．$\dfrac{\partial Q(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}$ の解を $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ とおくと，$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ となる．$\operatorname{rank}\boldsymbol{X} = k$ なので，$\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = k$ となり，$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ は逆行列が存在する．よって，$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ となる．

2. $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}$ は明らか．また，

   $$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right]\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right] = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{M}$$

   となる．

3. $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \mathbf{O}$ になることに注意すると，

   $$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}$$

   となる．

4. $\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{u})'(\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}$ となる．また，$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}$ である．$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M} = \mathbf{O}$ になることに注意すると，$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M} = \mathbf{O}$ となる．よって，定理 2 より，$\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ と $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は独立となる．

5. $\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} = \left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\sigma}\right)'\boldsymbol{M}\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\sigma}\right)$ となる．また，$\dfrac{\boldsymbol{u}}{\sigma} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_n)$ である．

   $$\begin{aligned}\operatorname{tr}\boldsymbol{M} &= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right] = \operatorname{tr}\boldsymbol{I} - \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right]\\ &= \operatorname{tr}\boldsymbol{I} - \operatorname{tr}\left[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right] = \operatorname{tr}\boldsymbol{I} - \operatorname{tr}\boldsymbol{I}_k = n - k\end{aligned}$$

   となるので，$\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$ となる．

6. $\boldsymbol{\beta}$ の任意の推定量を $\boldsymbol{b}$ とする．ラグランジュ関数を次のようにおく．

   $$L(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}) + 2\lambda'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r})$$

   最小化の必要条件を満たす $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ をそれぞれ $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ と $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ とすると，

   $$\left.\frac{\partial L(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{b}}\right|_{\boldsymbol{b}=\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\lambda}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} + 2\boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

   $$\left.\frac{\partial L(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\boldsymbol{b}=\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\lambda}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = 2(\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

   となる．(1) より

   $$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{0}\\ &\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (2)\\ &\underbrace{\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}}\\ &\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}\end{aligned}$$

となる．rank $\boldsymbol{R} = q < k$ なので，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'$ は逆行列をもつ．よって，

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})$$

となる．この式を (2) に代入して，

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \tag{3}$$

となる．

7.

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})$$

となる．よって，$\boldsymbol{X}'\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ となることに注意すると，

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} &= \left[\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})\right]'\left[\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} + \underbrace{(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})}_{\geq 0} \geq \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}\end{aligned}$$

となる．

8. (a) (3) より，

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})$$

となるので，

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} &= (\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})\end{aligned}$$

となる．帰無仮説が正しいので，

$$R\hat{\beta} - \underbrace{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} &= (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \\ &= \boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}\end{aligned}$$

となる．ここで，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ である．また，$\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}$ となる．$\boldsymbol{u} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ であり，$\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \mathbf{O}$ なので，定理 1 より，$\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ と $\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ は独立となる．

(b) $\boldsymbol{T}$ は対称べき等行列である．

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\boldsymbol{T} &= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right] \\ &= \operatorname{tr}\boldsymbol{I}_q = q\end{aligned}$$

となるので，$\dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_q$ となる．

(c) $\dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_q$，$\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$ であり，$\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ と $\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ は独立なので，F 分布の定義にあてはめて，

$$F = \frac{\dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2}/q}{\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2}/(n-k)} = \frac{(\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}})/q}{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}/(n-k)} \sim F_{q,n-k}$$

となる．

IV.

1．(1) $1 - \dfrac{1}{1+\exp(x)}$

(2) $p(x_i) = \dfrac{1}{1+\exp(-\beta_1 - \beta_2 x_i)} = \dfrac{\exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)}{1+\exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)}, \quad 1 - p(x_i) = \dfrac{1}{1+\exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)}$

(3) $\log Odds(x_i) = \beta_1 + \beta_2 x_i$ (4) $\dfrac{d}{dx_i} p(x_i) = \dfrac{\beta_2 \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)}{\{1+\exp(\beta_1 + \beta_2 x_i)\}^2}$

2．(1) ベルヌーイ分布

(2) 記号 $y_i = 1$ if $y_i^* > 0$, $y_i = 0$ if $y_i^* \leq 0$ を導入する．$\underbrace{\text{尤度関数}}_{\text{キーワード}}$ $\prod_{i=1}^{n}\{p(x_i)\}^{y_i}\{1-p(x_i)\}^{1-y_i}$, を (β_1, β_2) に関して最大化するという $\underbrace{\text{最尤推定法}}_{\text{キーワード}}$ を適用する．

(3) 1) 帰無仮説 $\beta_2 = 0$ 対立仮説 $\beta_2 \neq 0$ 2) 有意水準 5%で帰無仮説 $\beta_2 = 0$ を棄却する．
3) $0.162 \pm 1.96 * 0.065$ を計算して $[0.0346, 0.2894]$ 4) $\log \widehat{Odds}(10) = -3.062 + 0.162 * 10 = -1.442$

I.

1. mean $1/\theta$, variance $1/\theta^2$
2. $\exp(-n\theta x)$ $(x > 0)$, $\quad T_n \sim \mathrm{Exp}(n\theta)$
3. mean $1/(n\theta)$, variance $1/(n\theta)^2$

Question II.

1.

$$\mathrm{E}(X) = \frac{a}{b}, \ \mathrm{E}(X^2) = \frac{a(a+1)}{b^2}, \ \mathrm{var}(X) = \frac{a}{b^2}$$

2.

$$p(y) = \frac{\Gamma(a+y)}{y!\Gamma(a)} \left(\frac{b}{b+1}\right)^a \left(\frac{1}{b+1}\right)^y$$

Negative binomial distribution.

3.

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{a}{b}, \ \mathrm{E}[Y(Y-1)] = \frac{a(a+1)}{b^2}, \ \mathrm{var}(Y) = \frac{a(b+1)}{b^2}$$

Question III.

1. Let $\boldsymbol{b}$ be an arbitrary estimator of $\boldsymbol{\beta}$. The necessary condition of minimization of the sum of squared residuals $Q(\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})$ is $\dfrac{\partial Q(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = \mathbf{0}$. We have

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{b}.$$

Let $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ be a solution of $\dfrac{\partial Q(\boldsymbol{b})}{\partial \boldsymbol{b}} = \mathbf{0}$. We have $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$. Since $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = k$, we have $\operatorname{rank}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = k$. Therefore, there exists the inverse of $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$, and we have $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$.

2. $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}$ is obvious. Further, we have

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M} = \left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right]\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right] = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{M}.$$

3. Noticing $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \mathbf{O}$, we have

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{u}.$$

4. $\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{M}\boldsymbol{u})'(\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}$. Further, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}$. Noticing $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M} = \mathbf{O}$, we have $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M} = \mathbf{O}$. Therefore, from Theorem 2, $\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ and $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ are independent.

5. $\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} = \left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\sigma}\right)'\boldsymbol{M}\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{\sigma}\right)$. Further, $\dfrac{\boldsymbol{u}}{\sigma} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n)$. Since

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \boldsymbol{M} &= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right] = \operatorname{tr} \boldsymbol{I} - \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right] \\ &= \operatorname{tr} \boldsymbol{I} - \operatorname{tr}\left[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right] = \operatorname{tr} \boldsymbol{I} - \operatorname{tr} \boldsymbol{I}_k = n - k, \end{aligned}$$

we have $\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$.

6. Let $\boldsymbol{b}$ be an arbitrary estimator of $\boldsymbol{\beta}$. We define the following Lagrangean function:

$$L(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}) + 2\lambda'(\boldsymbol{R}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}).$$

The solution $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ and $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ satisfy the necessary conditions:

$$\left.\frac{\partial L(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{b}}\right|_{\boldsymbol{b}=\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\lambda}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} + 2\boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial L(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right|_{\boldsymbol{b}=\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\lambda}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}} = 2(\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) = \mathbf{0}.$$

From (1), we have

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0} \\ &\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \qquad (2) \\ &\underbrace{\boldsymbol{R}\tilde{\boldsymbol{\beta}}}_{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \\ &\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}. \end{aligned}$$

Since $\operatorname{rank} \boldsymbol{R} = q < k$, there exists the inverse of $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'$. Therefore, we have

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}).$$

Substituting this equation into (2), we have

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\beta}} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}). \tag{3}$$

7. We have

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\tilde{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) = \hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}).$$

Therefore, noticing $\boldsymbol{X}'\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$, we have

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} &= \left[\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})\right]'\left[\hat{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})\right] \\ &= \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} + \underbrace{(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})}_{\geq 0} \geq \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}.\end{aligned}$$

8. (a) Since, from (3),

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}),$$

we have

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} &= (\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}).\end{aligned}$$

Under the null hypothesis,

$$R\hat{\beta} - \underbrace{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{R\beta}} = \boldsymbol{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}.$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} &= (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \\ &= \boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{u},\end{aligned}$$

where $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$. Further, we have $\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{u}$. We have $\boldsymbol{u} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ and $\boldsymbol{M}\boldsymbol{T} = \mathbf{O}$. From Theorem 1, $\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ と $\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ are independent.

(b) $\boldsymbol{T}$ is a symmetric idempotent. Since

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\boldsymbol{T} &= \operatorname{tr}\left[\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[\left[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right] \\ &= \operatorname{tr}\boldsymbol{I}_q = q,\end{aligned}$$

we have $\dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_q$.

(c) $\dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_q$, $\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-k}$, and $\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ and $\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}$ are independent. From the definition of F distribution, we have

$$F = \frac{\dfrac{\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2}/q}{\dfrac{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}}{\sigma^2}/(n-k)} = \frac{(\tilde{\boldsymbol{u}}'\tilde{\boldsymbol{u}} - \hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}})/q}{\hat{\boldsymbol{u}}'\hat{\boldsymbol{u}}/(n-k)} \sim F_{q,n-k}.$$

IV.

1. (1) $1-\dfrac{1}{1+\exp(x)}$

(2) $p(x_i)=\dfrac{1}{1+\exp(-\beta_1-\beta_2 x_i)}=\dfrac{\exp(\beta_1+\beta_2 x_i)}{1+\exp(\beta_1+\beta_2 x_i)},\quad 1-p(x_i)=\dfrac{1}{1+\exp(\beta_1+\beta_2 x_i)}$

(3) $\log Odds(x_i)=\beta_1+\beta_2 x_i$ (4) $\dfrac{d}{dx_i}p(x_i)=\dfrac{\beta_2\exp(\beta_1+\beta_2 x_i)}{\{1+\exp(\beta_1+\beta_2 x_i)\}^2}$

2. (1) Bernoulli distribution

(2) Let $y_i = 1$ if $y_i^* > 0$, and $y_i = 0$ if $y_i^* \le 0$. Then, we maximize the $\underbrace{\text{likelihood function}}_{\text{keyword}}$ $\prod_{i=1}^n \{p(x_i)\}^{y_i}\{1-p(x_i)\}^{1-y_i}$, with respect to (β_1,β_2), on the basis of the $\underbrace{\text{maximum likelihood method}}_{\text{keyword}}$.

(3) 1) null hypothesis $\beta_2=0$ alternative hypothesis $\beta_2\neq 0$

2) We reject the null hypothesis $\beta_2=0$ at 5% significance level.

3) $0.162 \pm 1.96 * 0.065$, thus, $[0.0346, 0.2894]$ 4) $\log \widehat{Odds}(10) = -3.062 + 0.162 * 10 = -1.442$

経営学

出題の趣旨

問題Ⅰ

問題Ⅰは，消費者行動におけるバラエティ・シーキングについて，その定義，発生の条件，有効なマーケティング戦略の導出プロセスを問うている．

バラエティ・シーキングは，新規性を求めてブランドをスイッチする消費者の購買行動である．この購買行動は新規性によって引き起こされることから，購買における関与度が低く，ブランド・ロイヤリティの低い状況において生じやすい．

この状況において企業は垂直的な製品差別化ではなく，水平的な製品差別化を行う．

Question Ⅰ examine the definition and condition of variety – seeking in addition to the effective marketing strategy.

Variety－seeking is the buying behavior consumer is motivated by novelty. Therefore, in this buying behavior, consumers don’t have high involvement to buying and their brand loyalty is very low.

In this situation, firms don’t adopt vertical product differentiation but horizontal product differentiation strategy.

（問題本文は記載不要．出題の趣旨は２００～４００字程度で記載してください.）

問題Ⅱ

出題の趣旨は，本問題を通して経営学において必要とされる基礎知識と論理的なスキルを確認することである．解答では，持続的イノベーションと破壊的イノベーションを区別し，破壊的イノベーションのプロセスを説明する必要がある．破壊とは，経営資源の少ない小さな企業が，既存の有力企業に挑んで成果をあげるプロセスをさしている．既存企業は，最も要求条件の厳しい顧客のために製品やサービスを改良すること（持続的イノベーション）を重視するため，その仕様はいくつかのセグメントのニーズを満たすものの，他のセグメントのニーズを無視することになる．破壊的な新規参入企業は最初，既存企業から見過ごされたセグメントに狙いを定め，よりふさわしい機能性を往々にして低価格で提供すること（破壊的イノベーション）により足場を築く．しかし，要求条件の厳しいセグメントから大きな利益を得ようとする既存企業は，概して本気で対抗しない．新規参入企業の製品やサービスを主要顧客が次々と購入するようになると，破壊的イノベーションが広がることになる．

Question II

This question examines applicants' basic knowledge and logical skills required in management. Applicants need to distinct the sustaining innovation and the disruptive innovation, and explain the logic of disruptive innovation process. Disruption describes a process whereby a smaller company with fewer resources is able to successfully challenge established incumbent businesses. Specifically, as incumbents focus on improving their products and services for their most demanding customers (sustaining innovation), they exceed the needs of some segments and ignore the needs of others. Entrants that prove disruptive begin by targeting those overlooked segments, gaining a foothold by delivering more-suitable functionality—frequently at a lower price (disruptive innovation). Incumbents, chasing higher profitability in more-demanding segments, tend not to respond vigorously. When mainstream customers start adopting the entrants' offerings in volume, disruptive innovation diffuses.

会計学
Accounting

出題の意図

問題Ⅰ．源泉別分類に基づいて資本を説明しなさい．

資本を源泉別に分類すると，払込資本，稼得資本，評価替資本，受贈資本となる．この問では，それぞれに分類される資本を説明し，さらに，現在の会計基準における貸借対照表上の資本の構造と問題にも言及する必要がある．

基本的に，払込資本は会社への出資または払込額であり，資本金と資本剰余金からなる．稼得資本は企業活動による資本の増加となる留保利益であり，利益剰余金である．なお，日本における資本準備金と利益準備金は旧商法から続く処分可能別分類による．評価替資本は貨幣価値変動や時価評価により評価差額であり，現在は後者の扱いが課題となっている．受贈資本は国などからの補助金や債務免除益などである．

現在，日本では貸借対照表の貸方が負債以外を「純資産の部」としており，さらに払込資本と稼得資本を株主資本として区分表示している．従来から評価替資本と受贈資本は「資本」とみるのか「利益」とみるかで意見が分かれてきたが，今も評価差額を利益と考えるかで国内外に差異がある．また，新株予約権も払込資本と考えるかで差異がある．このような国内外での考え方の差異が「純資産の部」をもうけた理由でもあり，これらの諸点についての説明も求められている．

A question intention

Question I . Explain Capital, based on the classification according to the source.

When classifying Capital according to the source, it becomes paid-in capital, earned capital, appraisal capital, and donated capital. The capital classified into each must be explained by this question. There, it is necessary to also mention the structure and the problem of Capital on balance sheet in the present accounting standards.

In principle, paid-in capital is the investment or the amount paid to a company, and consists of capital stock and capital surplus. Earned capital is retained earnings as the increase in capital by corporate activity, and is earned surplus. In addition, the capital reserve and earned surplus reserve in Japan are based on the classification according to disposal approval and are legal reserve. Appraisal capital is a variance of the estimate by monetary value change or market value change. The treatment of the latter has been a subject now. Donated capital consists of a subsidy from a country, gains from forgiveness of debt, etc.

Now, in Japan, the credit side of the balance sheet is "the part of net assets", except Liabilities. Furthermore, paid-in capital and earned capital are displayed as "shareholder capital". Opinions have been divided in whether appraisal capital and donated capital are "capital" or whether they are "profits". Whether a variance of the estimate is "profit", it is a point of argument still now. There is a different view about whether a share warrant is paid-in capital. The differences in such views are a reason for having prepared "the part of net assets". These many points have to be explained.

問題Ⅱ．ジャスト・イン・タイム生産方式の特徴を説明しなさい．

ジャストインタイム（JIT）生産方式の特徴を記述する問題である。JIT は，必要なものを，必要なときに，必要なだけ生産するという生産システムであり，豊田喜一郎によって発案された。このシステムを運用することで、在庫は極限まで減少する。JIT の本質は，無駄を省くということにあり，経済的発注量とは正反対の考え方である。以下のキーワードに触れながら，JIT の特徴を記述することが求められる。

・在庫の低減

・リードタイムの短縮

・プル生産（かんばん方式）

QuestionⅡ. Explain the major features of the just-in-time (JIT) production systems.

This question is one of describing the features of the just-in-time (JIT) production.

The origin of JIT method was founded by Kiichiro Toyoda. The JIT means a production system that makes only what is needed, when it is needed, and in the quantity needed.

The quantity of inventory therefore becomes extremely small by running this system. The essence of JIT is to eliminate waste, and JIT has the opposite way of thinking in economic order quantity. Description shall be made, focusing the following keywords.

- reduction of inventory
- shortening of lead time
- pull system (Kanban system)

オペレーションズ･リサーチ

Operations Research

出題の趣旨・解答例

（問題本文は記載不要．出題の趣旨は２００～４００字程度で記載してください．）

問題 I

1. 新しい非負変数 x_2^+, x_2^-, y を導入し，x_2 を $x_2^+ - x_2^-$ に置き換えることで，(P) を以下のように等式標準形に変換する．

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{P}')\ \max\ 4x_1 - x_2^+ + x_2^- + 2x_3 \\
&\quad \text{subject to :} \\
&\qquad x_1 - x_2^+ + x_2^- = 6 \\
&\qquad 3x_1 + x_3 + y = 12 \\
&\qquad x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, y \geq 0
\end{aligned}
$$

初期実行可能基底解を $(x_1,\ x_2^+, x_2^-, x_3,\ y) = (0,0,6,0,12)$ として辞書を作る．

$$
\begin{aligned}
z &= 6 + 3x_1 + 2x_3 \\
x_2^- &= 6 - x_1 + x_2^+ \\
y &= 12 - 3x_1 - x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数が正のものがあるので，現在の解は最適でない．係数最大の x_1 を 0 から 4 に増加させ，辞書を更新する．

$$
\begin{aligned}
z &= 18 - y + x_3 \\
x_2^- &= 2 + \frac{1}{3}y + x_2^+ + \frac{1}{3}x_3 \\
x_1 &= 4 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数が正のものがあるので，現在の解は最適でない．係数最大の x_3 を 0 から12 に増加させ，辞書を更新する．

$$
\begin{aligned}
z &= 30 - 2y \qquad - 3x_1 \\
x_2^- &= 6 \qquad + x_2^+ - x_1 \\
x_3 &= 12 - y \qquad - 3x_1
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数がすべて非正なので，現在の解は最適である．最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (0, -6, 12)$ で，最適値は30 である．

2. $\mathbf{x}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2^+ & x_2^- & x_3 & y \end{pmatrix}, \mathbf{c}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

   $\mathbf{b}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \end{pmatrix}$ を用いて，問題(P′)は以下のように表現できる．

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{P}')\ \min \mathbf{c}^\mathrm{T}\mathbf{x} \\
&\quad \text{subject to :} \\
&\qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

最適解において基底変数は x_2^-, x_3 であるので，基底行列 $\mathbf{B}$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．

$\mathbf{b}^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \end{pmatrix}$ を $\mathbf{b}'^\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 6 + t & 12 \end{pmatrix}$ に変更した問題が問題(P1)である. 問題(P1)の最適解においても x_2^-, x_3 が基底変数であるということは，$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$ が成り立つということである．すなわち，$t \geq -6$ である．

Question I

1. After introducing three nonnegative variables x_2^+, x_2^-, y and replacing x_2 with $x_2^+ - x_2^-$, transform Problem (P) into the following equivalent standard form (P′).

$$\begin{aligned}
\text{(P')}\ \ & \max\ 4x_1 - x_2^+ + x_2^- + 2x_3 \\
& \text{subject to:} \\
& \quad x_1 - x_2^+ + x_2^- = 6 \\
& \quad 3x_1 + x_3 + y = 12 \\
& \quad x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, y \ge 0
\end{aligned}$$

Construct a dictionary with a basic feasible solution $(x_1,\ x_2^+, x_2^-, x_3,\ y) = (0,0,6,0,12)$.

$$\begin{aligned}
z &= 6 + 3x_1 + 2x_3 \\
x_2^- &= 6 - x_1 + x_2^+ \\
y &= 12 - 3x_1 - x_3
\end{aligned}$$

The current solution is not optimal, since the first line of the dictionary corresponding to the objective function has a nonbasic variable with a positive coefficient. By increasing x_1 (a nonbasic variable with the maximum coefficient) from 0 to 4, rewrite the dictionary.

$$\begin{aligned}
z &= 18 - y + x_3 \\
x_2^- &= 2 + \frac{1}{3}y + x_2^+ + \frac{1}{3}x_3 \\
x_1 &= 4 - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}x_3
\end{aligned}$$

The current solution is not optimal, since the first line of the dictionary corresponding to the objective function has a nonbasic variable with a positive coefficient. By increasing x_3 (a nonbasic variable with the minimum coefficient) from 0 to 12, rewrite the dictionary.

$$\begin{aligned}
z &= 30 - 2y - 3x_1 \\
x_2^- &= 6 + x_2^+ - x_1 \\
x_3 &= 12 - y - 3x_1
\end{aligned}$$

The current solution is optimal, since the first line of the dictionary corresponding to the objective function has no nonbasic variable with a positive coefficient. An optimal solution is $(x_1, x_2, x_3) = (0, -6, 12)$, and the optimal value is 30.

2. By using $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2^+ & x_2^- & x_3 & y \end{pmatrix}$, $\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, and $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \end{pmatrix}$, Problem (P′) can be represented in the following manner.

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{P}')\ \min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
&\quad \text{subject to :} \\
&\qquad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Since the basic variables in the optimal solution for (P′) are x_2^- and x_3, the corresponding basic matrix $\mathbf{B}$ is $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Note that Problem (P1) is obtained from (P) by replacing $\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \end{pmatrix}$ with $\mathbf{b}'^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6+t & 12 \end{pmatrix}$. x_2^- and x_3 remain basic variables in the optimal solution for (P1) if and only if we have $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}' \geq \mathbf{0}$. It follows that the required range of values of *t* is $t \geq -6$.

問題 II

1. (1) 株式は 劣後債務，債券（借入金）は 優先債務と呼ばれるように，債権者は企業の保有する資産に対する所有権を株主に対して優先的に持つ．例えば，企業が 債務超過の状態で倒産すると，株主は残余資産をすべて優先的に債権者に渡さなければならないので，株式の価値はゼロとなる．

   (2) 株主は 残余利益のすべてを受け取る権利を持つ．残余利益とは，さまざまな費用や利払い金，税金などを支払ってなお企業に残った資金のことをいう．このため，業績好調のときには株主への配当は大きくなるが，業績不振のときには，利払い後に残る残余利益が小さくなるため，配当がゼロでも我慢しなければならない．一方，債権者は事前に決められた利息および元本のみを受け取り，それ以上の利益を受け取ることはできない．

   (3) 株主は議決権を持つ．このため，株主総会において重要な案件に関する決定権を持つ．一方，債権者には議決権がない．

2. 固定サイドの支払総額の現在価値は

$$V_{\mathrm{FIX}} = 1000000S(v(0,1) + v(0,1.5) + v(0,2))$$

となる．変動サイドの支払は以下の取引（単位：100 万円）を考えることで

t	0	0.5	1	1.5	2
満期 0.5 年の割引国債購入	$-v(0,0.5)$	$+1$			
満期 2 年の割引国債売却	$+v(0,2)$				-1
LIBOR $L(0.5,1)$ で運用		-1	$1+L(0.5,1)$		
LIBOR $L(1,1.5)$ で運用			-1	$1+L(1,1.5)$	
LIBOR $L(1.5,2)$ で運用				-1	$1+L(1.5,2)$
1 年後の利払い			$-L(0.5,1)$		
1.5 年後の利払い				$-L(1,1.5)$	
2 年後の利払い					$-L(1.5,2)$
合計	$-v(0,0.5)$ $+v(0,2)$	0	0	0	0

支払総額の現在価値は

$$V_{\mathrm{FL}} = 1000000(v(0,0.5) - v(0,2))$$

となる．スワップレートは両サイドの価値が等しくなるように決めるので，$V_{\mathrm{FIX}} = V_{\mathrm{FL}}$ より，

$$S = \frac{v(0,0.5) - v(0,2)}{v(0,1) + v(0,1.5) + v(0,2)}$$

となる．

3. リスク中立確率 p^* はすべての証券の期待収益率を無リスク資産の利回りに一致させる．すなわち，

$$\frac{\mathbb{E}^*[S_1] - S}{S} = \frac{p^* uS + (1-p^*)dS - S}{S} = r$$

という関係式からリスク中立確率を求めると

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Question II

1. (1) Stock is a subordinated debt, while bond is a senior debt.
   (2) Shareholders have the residual claim, while bondholders have the collateral claim.
   (3) Shareholders have the voting right, while bondholders do not.

2. Present value of the total payment for the fixed side is given by

$$V_{\mathrm{FIX}} = 1000000S(v(0,1) + v(0,1.5) + v(0,2)).$$

For the floating side, consider the following deal:

t	0	0.5	1	1.5	2
Purchase discount government bonds with maturity 0.5 year	$-v(0,0.5)$	$+1$			
Sell discount government bonds with maturity 2 years	$+v(0,2)$				-1
Turn over with LIBOR $L(0.5,1)$		-1	$1+L(0.5,1)$		
Turn over with LIBOR $L(1,1.5)$			-1	$1+L(1,1.5)$	
Turn over with LIBOR $L(1.5,2)$				-1	$1+L(1.5,2)$
Payment after 1 year			$-L(0.5,1)$		
Payment after 1.5 years				$-L(1,1.5)$	
Payment after 2 years					$-L(1.5,2)$
合計	$-v(0,0.5)$ $+v(0,2)$	0	0	0	0

Present value of the total payment is given by

$$V_{\mathrm{FL}} = 1000000(v(0,0.5) - v(0,2)).$$

Swap rate is given by $V_{\mathrm{FIX}} = V_{\mathrm{FL}}$:

$$S = \frac{v(0,0.5) - v(0,2)}{v(0,1) + v(0,1.5) + v(0,2)}.$$

3.

$$\frac{\mathbb{E}^*[S_1] - S}{S} = \frac{p^*uS + (1-p^*)dS - S}{S} = r$$

$$p^* = \frac{1+r-d}{u-d}$$