マクロ及びミクロ経済学

解答例

問題Ⅰの解答例

１．（１）若いときの老後の予算制約式より，貯蓄 s を消去し，生涯にわたる予算制約式は,

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = Y - T$$

（２）　最大化　$U(c_1, c_2) = c_1 c_2$　生涯のわたる予算制約式　$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = Y - T$

以下の２つの連立方程式を解く.

①　$MRS = 1 + r$，すなわち，$\frac{c_2}{c_1} = 1 + r$，あるいは，$c_1 = \frac{c_2}{1+r}$

②　$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = Y - T$

解は，$c_1^* = \frac{Y-T}{2}$、$c_2^* = \frac{(1+r)(Y-T)}{2}$

（３）　図は省略（通常の図で，予算線と無差別曲線を描き最適点を図示）

２．（１）若いときの老後の予算制約式より，貯蓄 $(s+b)$ を消去し，$T = b$ を用いると，生涯にわたる予算制約式は,

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = Y - T$$

（２）　最大化　$U(c_1, c_2) = c_1 c_2$　生涯のわたる予算制約式　$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = Y - T$

１と同じ問題なので，解は，$\hat{c}_1 = \frac{Y-T}{2}$、$\hat{c}_2 = \frac{(1+r)(Y-T)}{2}$

（３）　図は省略（通常の図で、予算線と無差別曲線を描き最適点を図示）

３．上記の１と２の結果より，方法１（課税）と方法２（公債発行）の最適消費計画は同じである．この結果から，１期に公債発行による増税を回避する政策を行っても，２期に増税となるので，１期の消費は増加しない．したがって，国民所得は増加しない．ケインズの減税政策は有効でない．

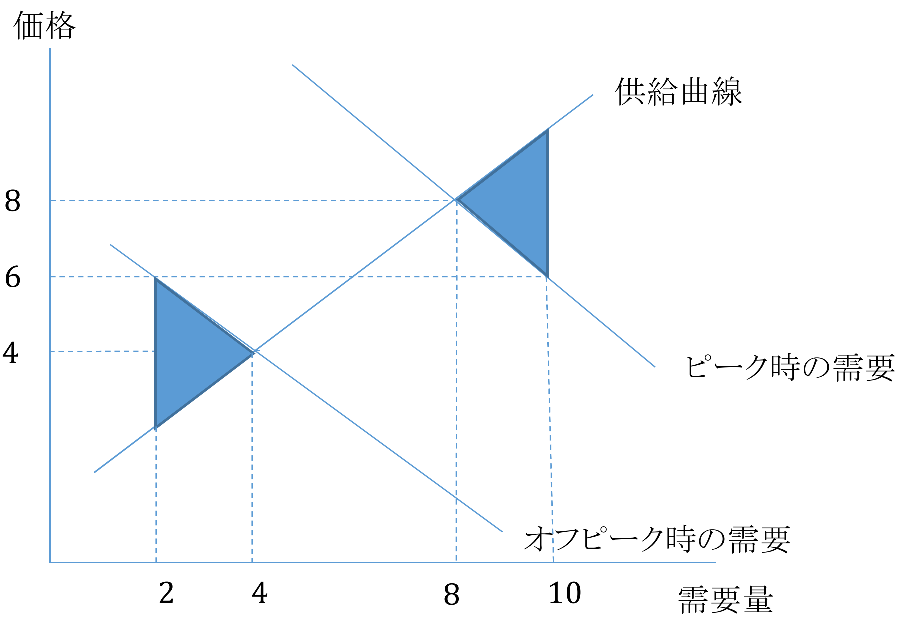
問題 II.

1.

(1) それぞれの需要曲線に$P = 6$を代入すると，ピーク時の需要は 10，オフピーク時の需要は 2 となる．

(2) それぞれの需要曲線と供給曲線を連立させて価格について解くと，ピーク時の価格は 8，オフピーク時の価格は 4 となる．

(3) 下の図の青く塗られた箇所が価格差別を行うことで増加する社会的余剰になる．面積を計算すると，社会的余剰は 8 だけ増えることがわかる．



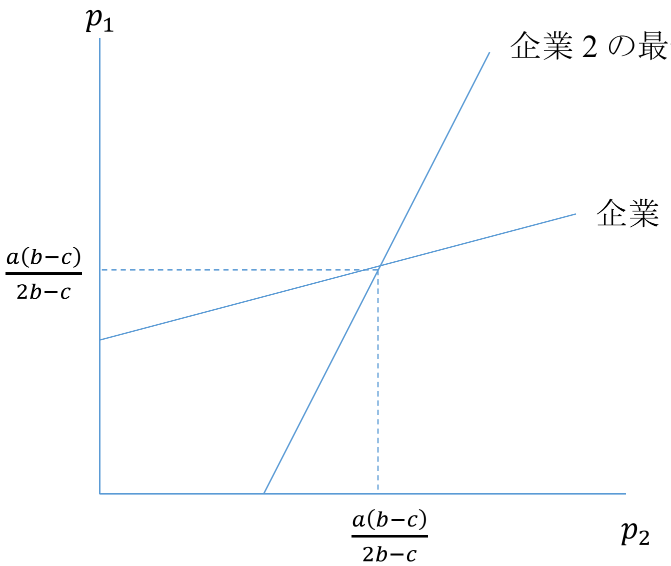
2.

(1) 効用最大化問題$\max_{q_1,q_2,q_3} U \ s.t. \sum_{x=1}^{3} p_x q_x = I$を解くと，財 1 と財 2 の需要関数はそれぞれ，$q_1 = \frac{a(b-c)-bp_1+cp_2}{(b-c)(b+c)}$，$q_2 = \frac{a(b-c)-bp_2+cp_1}{(b-c)(b+c)}$となる．

(2) スルツキー方程式は，財の価格変化によって生じる需要の変化を代替効果と所得効果に分解したものである．(1)より，財 1 の需要は消費者の所得水準に依存しないことから，財 1 に関する所得効果はゼロである．したがって，財 2 の価格上昇に伴う財 1 の需要の変化は，代替効果に等しくなる．

(3)　企業 1 と企業 2 の利潤はそれぞれ，$p_1\frac{a(b-c)-bp_1+cp_2}{(b-c)(b+c)}$，$p_2\frac{a(b-c)-bp_2+cp_1}{(b-c)(b+c)}$と表せる．企業 1 の最適反応関数は$p_1=\frac{c}{2b}p_2+\frac{a(b-c)}{2b}$，企業 2 の最適反応関数は$p_2=\frac{c}{2b}p_1+\frac{a(b-c)}{2b}$となる．これらの式を解くと，財 1 と財 2 のナッシュ均衡価格はともに$\frac{a(b-c)}{2b-c}$であることが分かる．

(4)　企業 2 の最適反応関数をp_1について解くと，$p_1=\frac{2b}{c}p_2-\frac{a(b-c)}{c}$となる．$b>c>0$より，企業 2 の最適反応関数の傾きは企業 1 のそれよりも大きく，また切片は負であるため，下図のように，企業 2 の最適反応関数は企業 1 の最適反応関数を下から交わることが分かる．したがって，どのようなp_1またはp_2が与えられたとしても，(3)で得られた均衡価格が実現することから，(3)のナッシュ均衡は安定的である．



社会経済学（政治経済学）

出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ（出題の趣旨）

資本主義経済における自由主義と帝国主義の段階区分について，両者の違いと移行理由を問う問題．主要産業（軽工業・綿工業／重工業・鉄鋼業）, 生産技術（固定資本・収穫逓増・必要資本の小／大），競争（多数競合，価格競争／価格協定・合併買収，寡占・独占），支配的資本（産業資本／金融資本），国家政策（自由放任，自由貿易／社会政策，関税・資本輸出政策）といった観点で両者を明確に比較でき，そのうち特に，主要産業や生産技術の変遷にその移行の原因を見ることができるかどうかがポイントである.

問題Ⅱ（出題の趣旨）

資本主義経済における地代の基本的な形態である「差額地代」の二つの形態について説明させた上で, 地代の社会経済学的な意味について論じさせる問題.

１.「差額地代第Ⅰ形態」と「差額地代第Ⅱ形態」については，受験者の理解の程度を明確に測るために，数値例を用いて解答することを求めた.

２.「地代が発生することの意味」を論じさせることを通して，受験者の論理的能力をみる．叙述の内容については，地代に関する叙述であれば，資本主義的な階級関係や自然力の処理方法など，社会経済学において一般的に指摘されるもの以外の見解も許容する.

経済思想

出題の趣旨・解答例

（問題本文は記載不要．出題の趣旨は２００～４００字程度で記載してください.）

問題 I

　フランソワ・ケネーを代表者とする重農学派・重農主義に関する基本的な知識を問う問題である。学派の創立者であるケネーは，コルベール主義と呼ばれる重商主義政策によってフランス経済が疲弊していた事態を背景に, 18 世紀中頃に独創的な経済思想を展開した。その根本思想は，人間にとって最も有利な自然的秩序が存在することを認める自然法思想と，農業が富の唯一の源泉であるとする考え方にあった。これらの思想に基づいて，政策論としては，穀物取引の自由化と農民への課税の軽減を主張した。また, 経済分析上の貢献として，経済循環の仕組みを先駆的に論じた「経済表」があった。こうしたケネーの学説を継承する一団が，フィジオクラートと呼ばれることになる。本設問においては，経済思想史上の重要な学派であるフィジオクラートについて，その学説の特徴を理解しているかどうかが，問われている。

問題Ⅱ

　ジョン・ケネス・ガルブレイスは、20 世紀半ばを代表する制度経済学者であり、政策決定において社会的な影響力を持った。その思想は、古典派や新古典派のような主流の経済学の非現実性とそれから導かれる政策的含意を批判して、テクノクラート支配に対抗する勢力を社会的に育成することを目指すものであった。とりわけ、消費行動が「依存効果」を通じて、支配的な生産部門の意図に左右されることを問題視して、消費主体の自律性はいかにして可能かという問題を提起した点で、当時の消費者運動に大きな影響を与えている。本設問においては、かかる基本的な経済思想を理解しているかどうか、またその思想をどのように評価するかということが問われている。

統計学

問題 I 解答

１．

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\begin{cases} 1-b^a x^{-a} & x\geq b \\ 0 & x<b \end{cases}$$

２．$F(M)=1/2$ を満たす M は，$M=2^{1/b}b$.

３．平均値 $E[X]=\displaystyle\int_0^\infty xf(x)dx=ab/(a-1)$. ただし，$a>1$.

４．分散 $V[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\dfrac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}$. ただし，$a>2$.

統計学

問題 II.

1. β_0 と β_1 の任意の推定量を $\tilde{\beta}_0$ と $\tilde{\beta}_1$ とし，残差を $\tilde{u}_i = y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 x_i$ とする．残差 2 乗和 $Q(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1) = \sum \tilde{u}_i^2 = \sum (y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 x_i)^2$ を最小にする $\tilde{\beta}_0$ と $\tilde{\beta}_1$ を求める．$\tilde{\beta}_0$ と $\tilde{\beta}_1$ で微分すると，

$$\frac{\partial Q(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)}{\partial \tilde{\beta}_0} = 2 \sum (y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 x_i)(-1)$$
$$\frac{\partial Q(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)}{\partial \tilde{\beta}_1} = 2 \sum (y_i - \tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1 x_i)(-x_i)$$

となる．最小化のための必要条件は $\dfrac{\partial Q(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)}{\partial \tilde{\beta}_0} = 0$，$\dfrac{\partial Q(\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1)}{\partial \tilde{\beta}_1} = 0$ であり，その解を $\hat{\beta}_0$ と $\hat{\beta}_1$ とすると，

$$2 \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)(-1) = 0$$
$$2 \sum (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)(-x_i) = 0$$

となる．これを整理すると，正規方程式

$$\begin{cases} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_i = \sum y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \tag{2}$$

を得る．

2. $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{x})$ とおく．このとき，

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\iota}' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} (\boldsymbol{\iota}, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{\iota} & \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\iota} & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix}$$

となる．また，

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\iota}' \\ \boldsymbol{x}' \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\iota}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

となる．(2) は

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

と書くことができるので，(2) は

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{3}$$

となる．

3. (3) の左から逆行列 $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ をかけると，

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

となるので，

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

となる．

4.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_2\end{aligned}$$

となるので，(4) は $\boldsymbol{A}$ の逆行列である．

5. (4) より，

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n\end{pmatrix}$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix}\hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1\end{pmatrix} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum y_i \\ \sum x_i y_i\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum y_i \\ \sum x_i y_i\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\begin{pmatrix}\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i \\ -\sum x_i \sum y_i + n\sum x_i y_i\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}\begin{pmatrix}\bar{y}\sum x_i^2 - \bar{x}\sum x_i y_i \\ \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \\ \hat{\beta}_0 &= \frac{\bar{y}\sum x_i^2 - \bar{x}\sum x_i y_i}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\bar{y}(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2) - \bar{x}(\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y})}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}\end{aligned}$$

となる．

6. $\boldsymbol{u} = (u_1, \cdots, u_n)'$ とおくと，単回帰モデル (1) は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}$ と書くことができる．このとき，最小 2 乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}$$

となる．仮定 2 より $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ となる．よって，

$$\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\,\mathrm{E}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\beta}$$

となる．

7. 仮定 2 より $\mathrm{V}(\boldsymbol{u}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}') = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$ となる．$\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ なので，

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}))(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}))'] = \mathrm{E}[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'] \\
&= \mathrm{E}[(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}] = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\,\mathrm{E}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}')\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\sigma^2\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}
\end{aligned}$$

となる．

経営学
出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ
出題の趣旨は，組織のコンティンジェンシー理論の問題を通して，経営学における組織構造に関する基本的な知識の習得度を確認することである。解答には，（少なくとも）次の二点についての論述と，それらを踏まえたうえで，組織のコンティンジェンシー理論の代表的知見について具体的に言及した記述が含まれることを期待している。第一に，組織のコンティンジェンシー理論の経営学説史上の位置づけに関する論述（すなわち，組織のコンティンジェンシー理論は，唯一最善の組織構造が存在するというワン・ベスト・ウェイ・アプローチではなく，状況に応じて有効な組織構造は異なるというコンティンジェンシー・アプローチにもとづいていること）である。第二に，組織のコンティンジェンシー理論における変数間の基本的な関係に関する論述（すなわち，環境や技術などの状況変数と組織構造や管理システムといった組織特性変数が適合することで，組織成果が高まること）である。

問題Ⅱ
出題の趣旨は，満足化原理（および最適化原理）の問題を通して，経営学における合理的意思決定に関する基本的な知識の習得度を確認することである。解答には,（少なくとも）次の二点についての論述が含まれることを期待している。第一に, 満足化原理の経営学説史上の位置づけに関する論述（すなわち, まず, 現実的に人間の思考能力は限られているため，完全な合理性にもとづく最適化原理（より具体的には，事前に全ての代替案とその結果を挙げ，それらを順序づけていくことで最良の選択を志向するモデル）は実践的とはいえないこと，次に，このような最適化モデルの限界を乗り越えるべく，限定された合理性にもとづく満足化原理の定式化が試みられたこと）である。第二に，満足化原理の具体的内容に関する論述（すなわち，満足化原理では，人間は自らの希求水準に達するまで代替案を探索しつづけるとされるが，代替案の探索の過程にお

いて報酬の期待値や希求水準の見直しが行われるとされること）である。

オペレーションズ・リサーチ

解答例

問題Ⅰ．以下の二つの問いに答えなさい．

1．次の線形計画問題を単体法で解きなさい．

$$
\begin{aligned}
\text{問題(P)}\ \ \min\quad & -5x_1-4x_2-x_3\\
\text{subject to}:\ & \\
& x_1+\ \ x_2+x_3\le 4\\
& 5x_1+3x_2+6x_3\le 15\\
& x_1,x_2,x_3\ge 0
\end{aligned}
$$

2．問題(P) の目的関数の x_1 の係数を -5 から $-5+t_1$，x_2 の係数を -4 から $-4+t_2$ に変更した問題(P1)を考える．1．で求めた問題(P)の最適解が，問題(P1)においても最適であるためには，t_1 と t_2 がどのような条件をみたせばよいか答えよ．

[解答]

1．スラック変数 x_4,x_5 を導入し，問題(P)を以下のように等式標準形に変換する．

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\ \ \min\ & -5x_1-4x_2-x_3\\
\text{subject to}:\ & \\
& x_1+x_2+x_3+x_4=4\\
& 5x_1+3x_2+6x_3+x_5=15\\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0
\end{aligned}
$$

実行可能基底解 $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,0,0,4,15)$ を基に，問題(P)の辞書を作成する．

$$
\begin{aligned}
z &= -5x_1-4x_2-x_3\\
x_4 &= 4-x_1-x_2-x_3\\
x_5 &= 15-5x_1-3x_2-6x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数が負のものがあるので，現在の解は最適でない．係数最小の x_1 を 0 から 3 に増加させ，辞書を更新する．

$$
\begin{aligned}
z &= -15 + x_5 - x_2 + 5x_3 \\
x_4 &= 1 + \frac{1}{5}x_5 - \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \\
x_1 &= 3 - \frac{1}{5}x_5 - \frac{3}{5}x_2 - \frac{6}{5}x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数が負のものがあるので，現在の解は最適でない．係数最小の x_2 を 0 から 5/2 に増加させ，辞書を更新する．

$$
\begin{aligned}
z &= -\frac{35}{2} + \frac{1}{2}x_5 + \frac{5}{2}x_4 + \frac{9}{2}x_3 \\
x_2 &= \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_5 - \frac{5}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_3 \\
x_1 &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_5 + \frac{3}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_3
\end{aligned}
$$

一行目（目的関数に関する行）の非基底変数（右辺の変数）の係数がすべて非負なので，現在の解は最適である．最適解は $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0)$ で，最適値は $-\frac{35}{2}$ である．

2. $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}, \mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{b}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 15 \end{pmatrix}$ を用いて，問題(P)は以下のように表現できる．

$$
\begin{aligned}
&\text{(P)}\ \ \min \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
&\qquad \text{subject to :} \\
&\qquad\qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

最適解において基底変数は x_1, x_2 である．基底行列を $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$，対応する目的

関数の係数ベクトルを$\mathbf{c_B}^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}-5 & -4\end{pmatrix}$，非基底行列を$\mathbf{N}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}$，対応する目的関数の係数ベクトルを$\mathbf{c_N}^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\end{pmatrix}$と表す．$\mathbf{c_B}^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}-5 & -4\end{pmatrix}$を$\mathbf{c'_B}^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}-5+t_1 & -4+t_2\end{pmatrix}$に変更した問題が問題(P1)である．1. で求めた解が問題(P1)においても最適であるということは，最適性の条件$\mathbf{c_N}^{\mathbf{T}}-\mathbf{c'_B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\geq\mathbf{0}$が成り立つということである．すなわち，$3t_1-t_2\leq 9,\ 3t_1-5t_2\geq -5,\ t_1-t_2\leq 1$である．

問題Ⅱ

1. 満期T年の割引債価格$d(T)$をとし，
$$d(1)=0.98, d(2)=0.96, d(3)=0.92, d(4)=0.88, d(5)=0.84$$
とする．このとき満期3年，額面100円，クーポン（1 年 1 回）5円の利付き債価格を求めよ．また4年先1年物先渡し利回りを求めよ．
2. 2 銘柄の株式と無リスク資産からなる完全な証券市場を考える．株式 A，B のリターンをμ_A,μ_B，リスクをσ_A,σ_Bとし，収益率の相関係数をρとする．また無リスク金利をrとする．要求リターンをμとする最小分散ポートフォリオを求めるための最適化問題を示せ．　また
$\mu_A=10\%, \mu_B=5\%, \sigma_A=0.3, \sigma_B=0.1, \rho=-0.5, r=4\%, \mu=10\%$
のとき最小分散ポートフォリオを示せ．
3. 現在の株価をSとし，1 期間後にd倍に減少するか，u倍に上昇する 1 期間 2 項モデルを考える．また，無リスク金利をrとし，株価が減少した場合のオプションペイオフをC_d，上昇した場合のペイオフをC_uとする．このオプションを複製するポートフォリオを示し，オプションプレミアムを求めよ．続いて，リスク中立確率を導出せよ．

［解答］

1.

0.98*5+0.96*5+0.92*105=106.3

0.88/0.84−1=4.7619%

2. 株式 A,B への投資比率をw_A,w_Bとし，無リスク資産への投資比率をw_0とする．また，株式 A,B の収益率を確率変数R_A,R_Bで表すと，

ポートフォリオのリターンは

$$E[w_A R_A + w_B R_B + w_0 r] = \mu_A w_A + \mu_B w_B + r w_0$$

また分散は

$$V[w_A R_A + w_B R_B + w_0 r] = \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B w_A w_B$$

とできる．よって最適化問題は以下のようになる．

$$\text{目的関数} \max_{w_A, w_B\ w_0} \ \sigma_A^2 w_A^2 + \sigma_B^2 w_B^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B w_A w_B$$

$$\text{制約式} \ \begin{aligned} &\mu_A w_A + \mu_B w_B + r w_0 = \mu \\ &w_A + w_B + w_0 = 1 \end{aligned}$$

例えば，制約式から，w_0を消去し，目的関数に w_A を代入して，w_B について最小化すると，$w_A = 5/7, w_B = 12/7, w_0 = -10/7$ を得る．

3．株式への投資単位を x とし，無リスク資産への投資額を y とする．オプションペイオフを複製するとき，

$$\begin{aligned} uSx + (1+r)y &= C_u \\ dSx + (1+r)y &= C_d \end{aligned}$$

が成立する．この連立方程式を x,y について解くと

$$x = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}$$

$$y = -\frac{dC_u - uC_d}{(1+r)(u-d)}$$

を得る．よって，オプションプレミアムは

$$Sx + y = \frac{(1+r-d)C_u - (1+r-u)C_d}{(1+r)(u-d)}$$

となる．

また，オプションプレミアムを変形すると，

$$Sx + y = \frac{1}{1+r}\left\{\frac{1+r-d}{u-d}C_u + \left(1 - \frac{1+r-d}{u-d}\right)C_d\right\}$$

と表せるので，$q = \dfrac{1+r-d}{u-d}$ がリスク中立確率に他ならない．ただし，$0 < q < 1$が必要であり，すなわち$d < 1+r < u$ が必要条件である．