マクロ及びミクロ経済学

出題の趣旨・解答例

問題 I　はじめに与式より IS 曲線と LM 曲線を表す式を導出しておく。

$$\text{IS 曲線：} 0.4Y + 200r = 120 + G - 0.6T \qquad (1)$$

$$\text{LM 曲線：} 0.6Y - 200r = M/P + 200\pi^e \qquad (2)$$

ただし、Mは名目貨幣供給量、Pは物価水準、π^eは期待インフレ率である。

1. 貨幣需要が GDP とともに増加するのは取引需要が増加するからであり、名目利子率の上昇によって減少するのは名目利子率が貨幣保有の機会費用だからである。
2. 均衡 GDP は$Y = 370$、均衡実質利子率は$r = 0.11$である。$M = 200$、$P = 1$、$T = \pi^e = 0$、$G = 50$として、(1)と(2)を連立させてYとrについて解けば、上記の均衡 GDP と均衡実質利子率を得る。
3. 均衡 GDP は$Y = 340$、均衡実質利子率は$r = 0.02$である。$M = 200$、$P = 1$、$\pi^e = 0$、$G = T = 50$として、(1)と(2)を連立させてYとrについて解けば、上記の均衡 GDP と均衡実質利子率を得る。
4. 均衡 GDP は減少し、均衡実質利子率は上昇する。横軸に GDP、縦軸に実質利子率をとり IS 曲線と LM 曲線を図示したとき、(2)より、デフレ期待が生じる（π^eが 0 から負になる）と LM 曲線が上（または左）にシフトする。よって、上記の結果を得る。
5. クラウディングアウトされる投資の大きさは 18 であり、それにより GDP は 45 だけ減少する。また、クラウディングアウトを生じさせないためには、実質利子率が当初の水準から変化しないよう名目貨幣供給量を増加させればよい。

　なお、投資のクラウディングアウトと GDP の変化は次のように示される。政府支出の増加をΔGと表すと、均衡実質利子率の変化は、(1)と(2)より、$\Delta r = 0.6\Delta G/200$と表される。このとき、投資の変化は次のように与えられる。

$$\Delta I = -200\Delta r = -0.6\Delta G \qquad (3)$$

投資乗数は 1÷(1－限界消費性向)=1/0.4=2.5 だから、投資のクラウディングアウトによる GDP の減少は次のように与えられる。

$$\Delta Y = 2.5\Delta I = -1.5\Delta G \qquad (4)$$

(3)と(4)において$\Delta G = 30$とすれば、上記の結果を得る。

問題 II．以下の問題 1，問題 2 の両方に解答しなさい．

1．企業が n 個存在し，互いに類似した製品を販売している状況を想定する．$j = 1,2,\ldots,n$ として，企業 j の製品に対する価格をそれぞれ p_j として，企業 j の製品の需要曲線が

$$d_j = \frac{126}{n} + \frac{1}{n-1}\sum_{i \neq j} p_i - 2p_j$$

で示されるとする．すべての企業の費用関数は同一であり，各々の生産量 x に対して，総費用 c は

$$c = x^2 + 54$$

で示されるとする．各企業は他の企業の製品価格を所与として自己の製品の市場において利潤最大化を図るとする．このとき，

（１）企業数 n が 2 のとき．均衡における各企業の生産量および製品価格を求めなさい．

（２）企業の参入・退出がある長期において，均衡において参入する企業の最大数と，各企業の生産量および製品価格を求めなさい．

2．2 財(x,y)，2 消費者(A,B)，1 企業の生産経済を考える．各消費者は同じ効用関数を有し，

$$u_A(x,y) = u_B(x,y) = xy^2$$

と示されるとする．各消費者の初期保有は x 財のみであり，消費者 A は 24 単位，消費者 B は 48 単位を保有するとする．企業は x 財から y 財を生産し，その生産関数は

$$y = 2\sqrt{x}$$

で示されるとする．企業の利潤は 1/3 が消費者 A に，2/3 が消費者 B に配分されるとする．

（１）x 財の価格 p_x, y 財の価格 p_y を所与として，利潤最大化によって達成される企業の x 財の需要量と y 財の供給量，および利潤額を求めなさい．

（２）x 財の価格 p_x, y 財の価格 p_y，企業の利潤 π を所与として，効用最大化によって達成される消費者 A，B の各財への需要量 (x_A, y_A)，(x_B, y_B) を求めなさい．

（2）競争均衡における 2 財の価格比$\frac{p_x}{p_y}$を求めなさい．また，均衡において企業が生産に投入する x 財の量と産出する y 財の量，および消費者 A, B の各財の消費量を求めなさい．

問題Ⅱ

6.

（１）n=2 のとき, 各企業の企業 1 の製品に対する需要曲線は，$d_1 = 63 + p_2 - 2p_1$であり，企業 1 の利潤は$\pi_1 = p_1 d_1 - c_1 = p_1 d_1 - (d_1)^2 - 54$ となる．利潤最大化の条件は,

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial p_1} = (63 + p_2 - 4p_1) + 4(63 + p_2 - 2p_1)$$

$$= 315 + 5p_2 - 12p_1 = 0$$

同様に，企業 2 の利潤最大化の条件　$315 + 5p_1 - 12p_2 = 0$ を得る．

これらより，$\boldsymbol{p_1 = p_2 = 45}$を得る．このとき，$\boldsymbol{d_1 = d_2 = 18}$を得る．

（２）参入企業が n のとき，各企業 j について，$\pi_j = p_j d_j - \left(d_j\right)^2 - 54$であり，

利潤最大化条件は　$\frac{\partial \pi_j}{\partial p_j} = d_j + p_j \frac{\partial d_j}{\partial p_j} - 2d_j \frac{\partial d_j}{\partial p_j} = 0$ である．

需要関数より$\frac{\partial d_j}{\partial p_j} = -2$であり，$\frac{\partial \pi_j}{\partial p_j} = 5d_j - 2p_j = 0$ を得る．

これより，$\frac{630}{n} + \frac{5}{n-1} \sum_{i \neq j} p_i - 12p_j = 0$ (1)

対称性より$\mathrm{p} = p_1 = p_2 = \cdots = p_n$とおくと，(1)より，$\mathrm{p} = \frac{90}{n}$ を得る．需要曲線より

$d_j = \frac{36}{n}$であり，利潤は$\pi_j = \left(\frac{90}{n}\right)\left(\frac{36}{n}\right) - \frac{36^2}{n^2} - 54 = \frac{36*54}{n^2} - 54 = 54(\frac{36}{n^2} - 1)$ となる．

長期の均衡において$\pi_j = 0$となるため，$\mathbf{n = 6}$を得る．このとき，<u>**p=15，x=6**</u> となる．

2.

（１）企業の利潤は，$\pi = p_y y - p_x x = 2p_y \sqrt{x} - p_x x$ より，利潤最大化の条件は

$\frac{d\pi}{dx} = \frac{p_y}{\sqrt{x}} - p_x = 0$．これより，$\boxed{\mathbf{x} = (\frac{p_y}{p_x})^2,\ \mathbf{y} = 2(\frac{p_y}{p_x})}$を得る．このとき，$\boxed{\boldsymbol{\pi} = \frac{{p_y}^2}{p_x}}$.

（２）一般に，消費者 A の x 財の初期保有を a,消費者 B の x 財の初期保有を b とおく．

消費者 A の予算制約式は　$p_x x_A + p_y y_A = ap_x + (\frac{a}{a+b})\pi$ (1)

効用最大化の条件は，$MRS_{yx}^A = \frac{(\frac{\partial u_A}{\partial x_A})}{(\frac{\partial u_A}{\partial y_A})} = \frac{y_A}{2x_A} = \frac{p_x}{p_y}$．これより，下記を得る．

$$y_A = 2\frac{p_x}{p_y} x_A. \qquad (2)$$

予算制約式(1)に代入して，$p_x x_A + p_y 2 \frac{p_x}{p_y} x_A = ap_x + (\frac{a}{a+b})\pi$ より，$3p_x x_A = ap_x + (\frac{a}{a+b})\pi$.

よって，$x_A = \frac{1}{3p_x}\left(ap_x + \left(\frac{a}{a+b}\right)\pi\right)$，また(2)とより，$y_A = \frac{2}{3p_y}\left(ap_x + \left(\frac{a}{a+b}\right)\pi\right)$.

消費者 B の予算制約は　$p_x x_B + p_y y_B = bp_x + (\frac{b}{a+b})\pi$．先と同様にして，消費者 B の

需要は下記となる．

$$x_B = \frac{1}{3p_x}\left(bp_x + \left(\frac{b}{a+b}\right)\pi\right),\ \ y_B = \frac{2}{3p_y}\left(bp_x + \left(\frac{b}{a+b}\right)\pi\right).$$

設問では，a=24, b=48 より，

$$\boxed{\boldsymbol{x_A = \frac{1}{3p_x}\left(24p_x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{p_x}\left(8p_x + \frac{1}{9}\pi\right)}},\ \ \boxed{\boldsymbol{y_A = \frac{2}{3p_y}\left(24p_x + \frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{p_y}\left(16p_x + \frac{2}{9}\pi\right)}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_B = \frac{1}{3p_x}\left(48p_x + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{p_x}\left(16p_x + \frac{2}{9}\pi\right)}},\ \ \boxed{\boldsymbol{y_A = \frac{2}{3p_y}\left(48p_x + \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{1}{p_y}\left(32p_x + \frac{4}{9}\pi\right)}}$$

（３）x 財の総超過需要は，下記のように計算できる．

$$ED_x = (x_A - a) + (x_B - b) + x$$

$$= \left(\frac{1}{3p_x}\left(ap_x + \left(\frac{a}{a+b}\right)\pi\right) - a\right) + \left(\frac{1}{3p_x}\left(bp_x + \left(\frac{b}{a+b}\right)\pi\ \right) - b\right) + \ (\frac{p_y}{p_x})^2$$

$$= \frac{1}{3p_x}\left(\ (a+b)p_x + \frac{a+b}{a+b}\pi\right) - (a+b) + (\frac{p_y}{p_x})^2$$

$$= \frac{1}{3p_x}(\ (a+b)p_x + \pi) - (a+b) + (\frac{p_y}{p_x})^2$$ これに $\pi = \frac{{p_y}^2}{p_x}$を代入して，

$$= \frac{1}{3p_x}\left(\ (a+b)p_x + \frac{{p_y}^2}{p_x}\right) - (a+b) + (\frac{p_y}{p_x})^2$$

$$= -\frac{2}{3}(a+b) + \frac{4}{3}(\frac{p_y}{p_x})^2$$

均衡では　ED_x=0 より，$(\frac{p_y}{p_x})^2 = \frac{a+b}{2}$．よって　$\frac{p_y}{p_x} = \sqrt{\frac{a+b}{2}}$ (3)

均衡における企業の生産量および利潤は，$x = (\frac{p_y}{p_x})^2$，$y = 2(\frac{p_y}{p_x})$，$\pi = \frac{{p_y}^2}{p_x}$と表せる．

消費者 A の消費量は,

$$x_A = \frac{1}{3p_x}\left(ap_x + \left(\frac{a}{a+b}\right)\pi\right) = \frac{1}{3p_x}\left(ap_x + \left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{p_y}{p_x}\right)p_y\right) = \frac{a}{3} + \frac{1}{3}(\frac{a}{a+b})(\frac{p_y}{p_x})^2$$

(3)より，$(\frac{p_y}{p_x})^2 = \frac{a+b}{2}$を代入して，

$$x_A = \frac{a}{3} + \frac{a}{6} = \frac{1}{2}a.$$ (2)より，$$y_A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{2}}}\right)x_A = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{2}}}\right)a.$$

消費者 B について同様にして,

$$x_B = \frac{1}{3p_x}\left(bp_x + \left(\frac{b}{a+b}\right)\pi\right) = \frac{1}{3p_x}\left(bp_x + \left(\frac{b}{a+b}\right)\left(\frac{p_y}{p_x}\right)p_y\right) = \frac{b}{3} + \frac{1}{3}(\frac{b}{a+b})(\frac{p_y}{p_x})^2$$

これより，$x_B = \frac{1}{2}b \;\; y_B = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{2}}}\right)b.$

設問では，a=24, b=48 より，$\frac{a+b}{2} = 36, \frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{2}}} = \frac{1}{6}$とより，

$$\frac{p_y}{p_x} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} = 6. \quad \mathrm{x} = (\frac{p_y}{p_x})^2 = 36, \;\; \mathrm{y} = 2\left(\frac{p_y}{p_x}\right) = 12$$

$$x_A = \frac{1}{2}a = 12, \qquad y_A = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{2}}}\right)x_A = 4.$$

$$x_B = \frac{1}{2}b = 24, \qquad y_B = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+b}{2}}}\right)x_B = 8.$$

じっさい，各財の需給は

$x_A + x_B + x = 72(= 24 + 48)$，$y_A + y_B(= 4 + 8) = y(= 12)$ となり均衡している.

（経済思想）
出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ

経済思想史に関する基本的な知識を問う問題である。アダム・スミスはグラスゴー大学で道徳哲学の講義を行っていた。その内容は，自然神学，倫理学，法学，経済学の四部から構成されていたと伝えられている。そのうちの倫理学は『道徳感情論』として，また経済学は『国富論』として結実した。『道徳感情論』では，共感の作用によって利己心が抑制され，社会秩序が形成・維持されることが論じられており，その社会秩序が『国富論』で述べられる経済活動の枠組みになる。スミスは，自然的自由の体系においては，正義の法を犯さない限り，自分自身のやり方で利益を追求することが許されるとして，道徳・法と経済との間に深い関係があることを示した。本設問においては，経済思想史上の重要人物であるアダム・スミスについて，経済学を含む道徳哲学の特徴を理解しているかどうかが，問われている。

問題Ⅱ

現代の経済思想の基礎に関する基本的な質問である。と同時に、現代の経済学の学問的な基礎を根本的かつ方法的に問う問題である。その検討は、社会科学の方法論的基礎に関する広範な諸問題へと通じている。限界効用理論に関する理解は、例えば、方法論的個人主義や価値現象に関する主観主義の妥当性、均衡、最大化/最小化、静態/動態といった概念のレトリック性、科学としての方法的正当性、などの問題を提起するであろう。新古典派経済学は、1870 年を起源として、カール・メンガー、ウィリアム・スタンレー・ジェボンズ、レオン・ワルラスの三人の学者によって「限界効用」の概念とともに生まれたとされる。これら三人の理論には異なる点もあるが、それぞれの学者がどのような仕方で理論を生み出したのか、そしてまた、それらの理論はいかなる基礎をもつのかについて、批判を含めて自由に検討することが問われている。

統計学・解答例

Question I. 1. (1) $\begin{vmatrix} \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial \psi} \\ \frac{\partial t}{\partial r} & \frac{\partial t}{\partial \psi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\psi & -r\sin\psi \\ \sin\psi & r\cos\psi \end{vmatrix} = r(\cos\psi^2 + \sin\psi^2) = r\,.$

$$\begin{aligned}
(2)\quad I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s^2+t^2)}\,dsdt \quad [\text{let } s = r\cos\psi\,,\ t = r\sin\psi\,] \\
&= \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \times r\,d\psi \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr = 2\pi\Big[-\frac{1}{2}\,e^{-r^2}\Big]_{r=0}^{r=\infty} = \pi \quad [\text{i.e., } I = \sqrt{\pi}\,].
\end{aligned}$$

2. (1) Clearly, $f(x) > 0$. Also, we have

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \quad [\text{let } \tfrac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} = t, \text{ i.e., } x = \mu + \sqrt{2\sigma^2}t\,] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-t^2}\,dx = \frac{I}{\sqrt{\pi}} = 1\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{x^2-2x(\mu+\theta\sigma^2)+\mu^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{-\frac{\{x-(\mu+\theta\sigma^2)\}^2+\mu^2-(\mu+\theta\sigma^2)^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= e^{\frac{-\mu^2+(\mu+\theta\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} = e^{\mu\theta+\frac{\sigma^2\theta^2}{2}}\,.
\end{aligned}$$

3. Noting that, for $i = 1, 2$, $g_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2}}$, $-\infty < x < \infty$, we have

$$\begin{aligned}
(g_1 * g_2)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(t-\mu_1)^2}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(s-t-\mu_2)^2}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2-2t\mu_1+\mu_1^2+(s-t)^2-2(s-t)\mu_2+\mu_2^2}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2t^2-2t(s+\mu_1-\mu_2)+s^2-2s\mu_2+\mu_1^2+\mu_2^2}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1/2)}}\,e^{-\frac{2\{t-(1/2)(s+\mu_1-\mu_2)\}^2-(1/2)(s+\mu_1-\mu_2)^2+s^2-2s\mu_2+\mu_1^2+\mu_2^2}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,e^{-\frac{-(1/2)(s+\mu_1-\mu_2)^2+s^2-2s\mu_2+\mu_1^2+\mu_2^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,e^{-\frac{s^2-2s(\mu_1-\mu_2)-(\mu_1^2-2\mu_1\mu_2+\mu_2^2)-4s\mu_2+2\mu_1^2+2\mu_2^2}{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,e^{-\frac{s^2-2s(\mu_1+\mu_2)+(\mu_1+\mu_2)^2}{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,e^{-\frac{\{s-(\mu_1+\mu_2)\}^2}{4}} \quad [\text{the density of the normal distribution } \mathrm{N}(\mu_1+\mu_2, 2)].
\end{aligned}$$

4. If the random variables X_1 and X_2 are independent, having the probability densities g_1 and g_2, then, the random variable $X_1 + X_2$ has the density $g_1 * g_2$.

Question II. 1. The mean and the variance of the Poisson distributed r.v. with τ

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \underbrace{\lambda e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}}_{\ell \equiv k-1} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \\
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
&= \underbrace{\lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}}_{\ell \equiv k-2} = \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2 \\
\mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \{\mathbb{E}[X]\}^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}
$$

2. The mean ($\mathbb{E}[\bar{X}]$) and the variance ($\mathbb{V}[\bar{X}]$) of the sample mean.

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \tau, \ \mathbb{V}[\bar{X}] = \frac{\tau}{n}$$

3. The statistics Z and Z^2 are

$$Z = \frac{\bar{X} - \tau}{\sqrt{\tau/n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \tau)}{\sqrt{\tau}}, \quad Z^2 = \frac{n(\bar{X} - \tau)^2}{\tau}.$$

(1) The asymptotic sampling distribution of Z is the <u>standard normal distribution</u>.

(2) The asymptotic sampling distribution of Z^2 is <u>the chi-squared distribution</u> <u>with one degree-of-freedom</u>.

4. Note that $c_{1,0.05} = d_{0.025}^2$. We derive the 95% confidence interval based on Z^2. The result based on Z is exactly same. Asymptotically we have the following relationship,

$$
\begin{aligned}
0.95 &\approx \Pr\left[Z^2 \leq c_{1,0.05}\right] = \Pr\left[\frac{n(\bar{X} - \tau)^2}{\tau} \leq c_{1,0.05}\right] \\
&= \Pr\left[\tau^2 - 2\left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right)\tau + \bar{X}^2 \leq 0\right]
\end{aligned}
$$

Note that

$$\left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right)^2 - \bar{X}^2 \geq 0.$$

Therefore,

$$0.95 \approx \Pr\left[\left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right) - \sqrt{\left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right) - \bar{X}^2} \leq \tau \leq \left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right) + \sqrt{\left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right) - \bar{X}^2}\right],$$

The 95% confidence interval for τ is,

$$\left[\ \left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right) - \sqrt{\left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right) - \bar{X}^2},\ \left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right) + \sqrt{\left(\bar{X} + \frac{c_{1,0.05}}{2n}\right) - \bar{X}^2}\ \right]$$

Question III. The criterion function can be rewritten as follows, using $\sum_{i=1}^{13} x_{1,i}x_{2,i} = 0$,

$$\begin{aligned} T(\beta_1, \beta_2) &= \sum_{i=1}^{13} (y_i - x_{1,i}\beta_1 - x_{2,i}\beta_2)^2 + \lambda(|\beta_1| + |\beta_2|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \underbrace{5(\beta_1 - b_1)^2 - 5b_1^2 + \lambda|\beta_1|}_{\text{a function of } \beta_1} + \underbrace{8(\beta_2 - b_2)^2 - 8b_2^2 + \lambda|\beta_2|}_{\text{a function of } \beta_2} \end{aligned}$$

1. Since $\sum_{i=1}^{13} x_{1,i}x_{2,i} = 0$, the OLS estimates are given as

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{13} x_{1,i}y_i}{\sum_{i=1}^{13} x_{1,i}^2} = \frac{5}{5} = 1, \quad b_2 = \frac{\sum_{i=1}^{13} x_{2,i}y_i}{\sum_{i=1}^{13} x_{2,i}^2} = \frac{-8}{8} = -1.$$

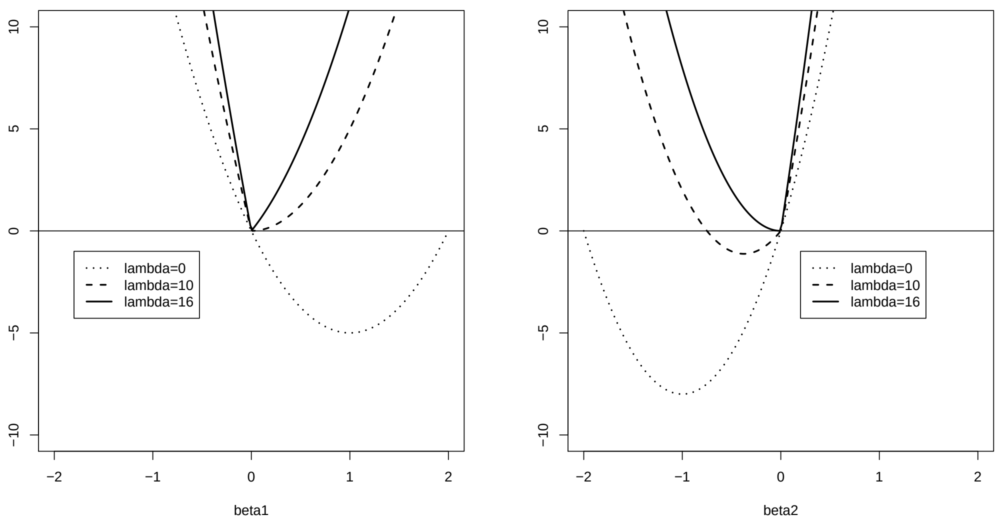
2. – $0 \le \lambda < 2|\sum_{i=1}^{13} x_{1,i}y_i| = 10 = 2\min\left\{|\sum_{i=1}^{13} x_{1,i}y_i|, |\sum_{i=1}^{13} x_{2,i}y_i|\right\}$, Then

$$(\beta_1^*, \beta_2^*) = \left(b_1 - \frac{\lambda}{10}, b_2 + \frac{\lambda}{16}\right)$$

   – $10 \le \lambda < 2|\sum_{i=1}^{13} x_{2,i}y_i| = 16 = 2\max\left\{|\sum_{i=1}^{13} x_{1,i}y_i|, |\sum_{i=1}^{13} x_{2,i}y_i|\right\}$, Then

$$(\beta_1^*, \beta_2^*) = \left(0, b_2 + \frac{\lambda}{16}\right)$$

   – $\lambda \ge 2|\sum_{i=1}^{13} x_{2,i}y_i| = 16$, Then $(\beta_1^*, \beta_2^*) = (0, 0)$.



3. The parameter λ penalizes larger (absolute) values of coefficient parameters. Even though the OLS estimator minimizes the criterion function without the penalty term, non-zero values of coefficeint estimates increase the total value of the criterion function through the penelty term. The parameter λ with a large value helps shrink the optimal coefficient estimates toward zero, and sometimes makes them exactly zero when λ is sufficienty large.

Question IV. 1. The following three statements hold: (i) $E[X_t] = \mu_X$ is independent of t. (ii) $V[X_t] = \sigma_X^2$ is independent of t. (iii) For each $h = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h)$ is independent of t.

2. (1) Under the assumption $|\alpha| < 1$, this process is weakly stationary.

(2) We start with $E[X_t] = c + \alpha E[X_{t-1}] + E[U_t]$ and $V[X_t] = V[c + \alpha X_{t-1} + U_t] = \alpha^2 V[X_{t-1}] + V[U_t] + 2\alpha Cov(X_{t-1}, U_t)$. By definition, $E[U_t] = 0$ and $V[U_t] = \sigma^2$. Also, from the stationarity, which is implied by $|\alpha| < 1$, $E[X_t] = \mu_X$ and $V[X_t] = \sigma_X^2$. Thus, we have $\mu_X(1 - \alpha) = c$, i.e., $\mu_X = \frac{c}{1-\alpha}$. On the other hand, noting that $Cov(X_{t-1}, U_t) = 0$, we have $\sigma_X^2(1 - \alpha^2) = \sigma^2$, i.e., $\sigma_X^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$.

3. (1) We derive the condition under which $z^2 - \alpha_1 z - \alpha_2 = 0$ has the two solutions z_1, z_2 (possibly complex), with $|z_1|, |z_2| < 1$, as follows:

(i) if $\alpha_1^2 + 4\alpha_2 < 0$, then, $z_1, z_2 = (\alpha_1 \pm i\sqrt{-(4\alpha_2 + \alpha_1^2)})/2$ (complex); in this case, $-1 < \alpha_2 < -\alpha_1^2/4$ (note that $z_1 z_2 = -\alpha_2$).

(ii) if $\alpha_1^2 + 4\alpha_2 \geq 0$, then, $z_1, z_2 = (\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha_2})/2$ (real); in this case, $\alpha_2 \geq -\alpha_1^2/4$, $-1 < \alpha_1/2 < 1$, and $1 \pm \alpha_1 - \alpha_2 > 0$.

In summary, the stationary condition on (α_1, α_2) is given by

$$\begin{cases} \alpha_2 < 1 + \alpha_1 \,, \\ \alpha_2 < 1 - \alpha_1 \,, \\ \alpha_2 > -1 \,. \end{cases}$$

(2) Minimize $\sum_{t=3}^{n} (x_t - c - \alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-2})^2$ with respect to (c, α_1, α_2).

4. (1) We have $\mu_t = E[X_t | X_{t-1}] = E[\mu + \epsilon_t \sqrt{\tau + \theta X_{t-1}^2} | X_{t-1}] = \mu + \sqrt{\tau + \theta X_{t-1}^2} E[\epsilon_t | X_{t-1}] = \mu + \sqrt{\tau + \theta X_{t-1}^2} E[\epsilon_t] = \mu$ and $\sigma_t^2 = V[X_t | X_{t-1}] = V[X_t - \mu | X_{t-1}] = E[(X_t - \mu)^2 | X_{t-1}] = E[\epsilon_t^2 (\tau + \theta X_{t-1}^2) | X_{t-1}] = (\tau + \theta X_{t-1}^2) E[\epsilon_t^2 | X_{t-1}] = (\tau + \theta X_{t-1}^2) E[\epsilon_t^2] = \tau + \theta X_{t-1}^2$.

(2) Using $E[X_t] = \mu$, we have

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_{t-1}) &= Cov(X_t - \mu, X_{t-1} - \mu) \\ &= E[(X_t - \mu)(X_{t-1} - \mu)] \\ &= E[(X_{t-1} - \mu)\epsilon_t \sqrt{\tau + \theta X_{t-1}^2}] \\ &= E[\epsilon_t] E[(X_{t-1} - \mu)\sqrt{\tau + \theta X_{t-1}^2}] \quad \text{[by assumption, } \epsilon_t \text{ is independent of } X_{t-1}], \end{aligned}$$

hence, $Cov(X_t, X_{t-1}) = 0$.

(3) Now, we have $X_t | X_{t-1} \sim \mathrm{N}(\mu, \tau + \theta X_{t-1}^2)$; its conditional density, given $X_{t-1} = x_{t-1}$, is equal to

$$f(x | x_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau + \theta x_{t-1}^2)}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2(\tau + \theta x_{t-1}^2)}} \,.$$

Maximize

$$\sum_{t=2}^{n} \log f(x_t | x_{t-1}) = -\frac{1}{2} \sum_{t=2}^{n} \left[\log(2\pi) + \log(\tau + \theta x_{t-1}^2) + \frac{(x_t - \mu)^2}{\tau + \theta x_{t-1}^2} \right]$$

with respect to (μ, τ, θ).

（経営学）

出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ

本設問は，戦略論分野の基本知識を問うものである．

企業は新しい製品カテゴリーの誕生する製品ライフサイクル段階において参入することにより，先発優位を獲得する。先発優位は，技術的リーダーシップ，戦略的に価値ある資源の先制確保，そして顧客のスイッチング・コストの確立を源泉として生じる．これらの主要な源泉についての理解，および先発優位を生み出すメカニズムを論理的に説明することが，本設問において求められている．本設問への答案により，①戦略論の基本概念に関する理解の正確性，②修士課程での学修に求められる論理的な思考の力量を評価できる．

The aim of this question is to evaluate the basic knowledge of strategic theory. The firms take the first-mover advantages by entering in the emerging market. These advantages arise from there sources: technological leadership, pre-emption of strategically valuable assets, and the creation of customer switching costs. The way applicants answer this question reveals both their understanding of the key concept in the strategic theory and their qualifications of logical and reasonable thinking skill.

問題Ⅱ

本設問は組織行動論分野の基本知識を問うものである．

職務設計は仕事の有意義感や成果に対する責任感などに影響し，内発的な動機づけをもたらす．

解答に際しては，職務設計の基礎理論である職務特性モデルをもとに，①職務特性の５次元（技能多様性，タスク完結性，タスク重要性，自律性，フィードバック），②それぞれの次元と心理状態との関係，③心理状態が動機づけの強さに与える影響を適切に説明することが求められる．

本設問への答案により，①組織行動論の基本概念に関する理解の正確性，②修士課程での学修に求められる論理的な思考の力量を評価できる．

This question aims to assess whether applicants have the basic knowledge in organizational behavior.

Job design is seen to influence experienced meaningfulness of the work and responsibility for the results, which leads to employee intrinsic motivation.

Applicants are expected to utilize the basic theory of job design, job characteristic model, to explain the effects of job design on work motivation in detail.

The model indicates five core job dimensions that have effects on critical psychological states and work motivation.

The way applicants answer this question reveals both their understanding of the key concept in organizational behavior and their qualifications of logical and reasonable thinking skill.

（会計学）

出題の趣旨

問題Ⅰ

現代の企業，とりわけグローバル企業では，M＆Aが重要な経営戦略の１つとなっている．M＆Aが行われると，通常，いわゆる「のれん」が発生する．「のれん」は，グローバル会計基準では，企業価値の一部を構成するものとして資産計上され，企業価値を評価するための財務報告においても重要な意味を持つようになっている．しかし，その一方で，「のれん」は減損のリスクに晒されており，企業価値の評価に大きな影響を与えるものでもある．

この問題は，こうした事情に基づいて，「のれん」の定義，資産としての認識・測定ならびに価値が著しく低下した場合の減損処理の方法についての基本的な理解を問うものである．

問題Ⅱ　分権化は、現代の企業にとって重要な組織構造の一つとなっている。組織構造によって会計システムも変わってくるため、その特徴を理解しておくことは重要である。

主な特徴としては、意思決定が現場に近いところで行われる、将来の経営者のトレーニングとなる、迅速な意思決定が可能となる、業績評価が容易となる等がある。他方、デメリットとしては、短期志向となる、重複した投資が行われる、セクショナリズムが発生する等が指摘できる。なお、集権化と比較しながら解答するとなおよい。

(English Version)

Question I

M&A is one of the most important management strategies for modern companies, especially global companies. When M&A is performed, so-called "goodwill" usually occurs. "Goodwill" is recorded as an asset in the global accounting standard as a part of corporate value, and it has become important in financial reporting to evaluate corporate value. However, on the other hand, "goodwill" is exposed to the risk of impairment, and it also has a big influence on the evaluation of corporate value.

Based on these circumstances, this problem asks the basic understanding of the definition of "goodwill", recognition and measurement as an asset, and the method of impairment treatment when the value decreases significantly.

Question II Decentralization has become one of the important organizational structures for modern enterprises. It is important to understand the characteristics of decentralization because an accounting system changes depending on the organizational structure.

Main features include decision making made near the site, training for future managers, rapid decision making, and ease of performance evaluation. On the other hand, as disadvantages, it can be pointed out that it becomes short-term oriented, duplicate investments are made, sectionism occurs. It is better to answer while comparing with the centralization.

オペレーションズ・リサーチ (解答例)

問題 I.

1．新しい非負変数 y_1 と y_2 を導入し，(P) を以下のように変換する．このとき，非正変数 x_1 は $-y_1$ に置き換えられていることに注意する．作成した問題を (P1) と記す．

$$\begin{array}{llrrrrl} \text{問題 (P1)} & \max & -3y_1 & -4x_2 & +4x_3 & & \\ & \text{subject to:} & & & & & \\ & & -y_1 & -2x_2 & +x_3 & = & -4 \\ & & & 4x_2 & +x_3+y_2 & = & 12 \\ & & \multicolumn{3}{r}{y_1, x_2, x_3, y_2 \geq 0} & & \end{array}$$

次に，(P1) の初期実行可能基底解を $(y_1, x_2, x_3, y_2) = (4, 0, 0, 12)$ として辞書を作る．

$$\begin{array}{rcl} z &=& -12 + 2x_2 + x_3 \\ y_1 &=& 4 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 &=& 12 - 4x_2 - x_3 \end{array}$$

一行目 (目的関数に関する行) に，係数が正である非基底変数 (右辺の変数) があるので，現在の解は最適でない．係数が正の x_3 を 0 から 12 に増加させ，辞書を更新する．

$$\begin{array}{rcl} z &=& -2x_2 - y_2 \\ y_1 &=& 16 - 6x_2 - y_2 \\ x_3 &=& 12 - 4x_2 - y_2 \end{array}$$

一行目 (目的関数に関する行) の非基底変数 (右辺の変数) の係数がすべて非正なので，現在の解は最適である．最適解は $(y_1, x_2, x_3, y_2) = (16, 0, 12, 0)$ (元の問題では, $(x_1, x_2, x_3) = (-16, 0, 12)$) で，最適値は 0 である．

2．問題 (P) の双対問題 (D) は，以下の通りである．

$$\begin{array}{llrrrl} \text{問題 (D)} & \min & 4z_1 & +12z_2 & & \\ & \text{subject to:} & & & & \\ & & z_1 & & \geq & -3 \\ & & 2z_1 & +4z_2 & \geq & -4 \\ & & -z_1+ & z_2 & \geq & 4 \\ & & & z_2 \geq 0 & & \end{array}$$

3． $\boldsymbol{x^T} = (y_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad y_2), \boldsymbol{c^T} = (-3 \quad -4 \quad 4 \quad 0)$, $\boldsymbol{b^T} = (-4 \quad 12)$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて，問題 (P1) は以下のように表現できる．

$$\text{問題 (P1)} \quad \max \quad \boldsymbol{c^T x}$$
$$\text{subject to:}$$
$$\boldsymbol{Ax = b}$$
$$\boldsymbol{x \geq 0}$$

最適解において，基底変数は $y_1,\ x_3$ である．基底行列 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と目的関数における基底変数の係数ベクトル $\boldsymbol{c_B^T} = (-3 \ \ 4)$ に対して，$\boldsymbol{c_B^T B^{-1}} = (3 \ \ 1)$ より，第一制約の潜在価格は 3 である．

問題 II.

1．

（1） $\rho = \frac{\sigma_{AM}}{\sigma_A \sigma_M} = 0.5.$

（2） $\beta = \frac{\rho \sigma_A}{\sigma_M} = 0.375.$

（3） $\lambda = (\mu_M - r)/\sigma_M = 0.05.$

（4） $\mu_A = r + \beta(\mu_M - r) = 4.375$

（5） 資本市場線は，点 $(0, r)$ および点 M を通る直線．その傾きがリスクの市場価格．点 A(σ_A, μ_A) は資本市場線よりも下に位置する．これは，株式 A 単体では，リスクの市場価格を上回る，リスク 1 単位あたりのリターンを得られないためである．

（6） TOPIX は数百の銘柄から構成され，点 A は，実行ポートフォリオの内部に含まれる．実行ポートフォリオの境界は，点 M に接する双曲線．

2．（1） 連立方程式

$$xuS + (1+r)y = C_u, \tag{1}$$
$$xdS + (1+r)y = C_d \tag{2}$$

から，

$$x = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}, \quad y = \frac{dC_u - dC_d}{(1+r)(d-u)}$$

を得る．

（２）オプション価格は，

$$C = xS + y = \frac{1}{1+r}\left\{\frac{1+r-d}{u-d}C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d}C_d\right\}$$

Question I.

1 . After introducing two nonnegative variables y_1 and y_2 and replacing x_1 with $-y_1$, transform the problem (P) into the following equivalent standard form (P1).

$$
\begin{array}{llrrrrcl}
\text{(P1)} & \max & -3y_1 & -4x_2 & +4x_3 & & & \\
 & \text{subject to:} & & & & & & \\
 & & -y_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & -4 \\
 & & & 4x_2 & +x_3 & +y_2 & = & 12 \\
 & & \multicolumn{4}{l}{y_1, x_2, x_3, y_2 \geq 0} & &
\end{array}
$$

Construct a dictionary with a basic feasible solution $(y_1, x_2, x_3, y_2) = (4, 0, 0, 12)$.

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & -12 + 2x_2 + x_3 \\
y_1 & = & 4 - 2x_2 + x_3 \\
y_2 & = & 12 - 4x_2 - x_3
\end{array}
$$

The current solution is not optimal, since the first line of the dictionary corresponding to the objective function has a nonbasic variable with a positive coefficient. By increasing x_3 (a nonbasic variable with a positive coefficient) from 0 to 12, rewrite the dictionary.

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & -2x_2 - y_2 \\
y_1 & = & 16 - 6x_2 - y_2 \\
x_3 & = & 12 - 4x_2 - y_2
\end{array}
$$

The current solution is optimal, since the first line of the dictionary corresponding to the objective function has no nonbasic variable with a positive coefficient. An optimal solution is $(y_1, x_2, x_3, y_2) = (16, 0, 12, 0)$ (i.e., $(x_1, x_2, x_3) = (-16, 0, 12)$), and the optimal value is 0.

2 . The dual problem (D) of (P) is described as follows.

$$
\begin{array}{llrrcl}
\text{(D)} & \min & 4z_1 & +12z_2 & & \\
 & \text{subject to:} & & & & \\
 & & z_1 & & \geq & -3 \\
 & & 2z_1 & +4z_2 & \geq & -4 \\
 & & -z_1 + & z_2 & \geq & 4 \\
 & & & z_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

3. By using $\boldsymbol{x^T} = (y_1 \ \ x_2 \ \ x_3 \ \ y_2), \boldsymbol{c^T} = (-3 \ \ -4 \ \ 4 \ \ 0)$, $\boldsymbol{b^T} = (-4 \ \ 12)$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, the problem (P1) can be represented in the following manner.

$$(\text{P1}) \qquad \max \ \ \boldsymbol{c^T x}$$
$$\text{subject to:}$$
$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

Since the basic variables in the optimal solution for (P1) are y_1 and x_3, the corresponding basic matrix $\boldsymbol{B}$ is $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, and the corresponding coefficient vector $\boldsymbol{c_B^T}$ in the objective function is $(-3 \ \ 4)$. By $\boldsymbol{c_B^T B^{-1}} = (3 \ \ 1)$, the shadow price for the first constraint is 3.

Question II.

1.

(1) $\rho = \frac{\sigma_{AM}}{\sigma_A \sigma_M} = 0.5.$

(2) $\beta = \frac{\rho \sigma_A}{\sigma_M} = 0.375.$

(3) $\lambda = (\mu_M - r)/\sigma_M = 0.05.$

(4) $\mu_A = r + \beta(\mu_M - r) = 4.375$

(5) The capital market line is a straight line connecting two points $(0, r)$ and M. The gradient of the line is the market price of risk. Point A is located under the capital market line. Since, in equilibrium, the excess return per unit risk of single stock A can not exceed the market price of risk.

(6) TOPIX has a few hundred number of different stock and hence point A is in a feasible portfolio set. The boundary of the feasible set is a hyperbolic line tangent to the capital market line at point M.

2. (1) From a system of equations

$$\begin{aligned} xuS + (1+r)y &= C_u, & (3) \\ xdS + (1+r)y &= C_d, & (4) \end{aligned}$$

we can get

$$x = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}, \quad y = \frac{dC_u - dC_d}{(1+r)(d-u)}.$$

(2) The option price is given by

$$C = xS + y = \frac{1}{1+r}\left\{\frac{1+r-d}{u-d}C_u + \frac{u-(1+r)}{u-d}C_d\right\}.$$