

マクロ及びミクロ経済学(Macroeconomics and Microeconomics)

出題の趣旨・解答例

問題 I.

1. 資本 (K_t) , 生産 (Y_t) , 労働 (L_t) , 設備投資 (I_t) , 貯蓄 (S_t) .
2. λ を任意の正の定数としたとき, $F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda F(K_t, L_t)$ となることを示せば良い. $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$ より,

$$\underbrace{(\lambda K_t)^\alpha (\lambda L_t)^{1-\alpha}}_{=F(\lambda K_t, \lambda L_t)} = (\lambda^\alpha K_t^\alpha) (\lambda^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}) = \lambda^\alpha \lambda^{1-\alpha} K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = \underbrace{\lambda K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}_{=F(K_t, L_t)}.$$

3. 生産関数を労働投入で割ると $\frac{F(K_t, L_t)}{L_t}$. 規模に関して収穫一定であるから, $\frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, \frac{L_t}{L_t}\right) = F(k_t, 1)$. ここで, $F(k_t, 1) = k_t^\alpha$ であるから, $f(k_t) = k_t^\alpha$ を得る.

4. $S_t = I_t$.

5. 生産関数, 資本蓄積式, 資本市場の均衡条件より, 一人当たり資本の蓄積は

$$k_{t+1} = \frac{sk_t^\alpha + (1-\delta)k_t}{1+n} \iff k_{t+1} - k_t = \frac{sk_t^\alpha - (n+\delta)k_t}{1+n}$$

で表される. 定常状態における一人当たり資本を k^* と表記すると, 定常状態の時
には $k_{t+1} = k_t = k^*$ は成り立つため. この条件を上記の一人当たり資本の蓄積式
に代入して $k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ を得る.

問題 II. 情報の非対称性の下での信用市場におけるモラルハザードの発生, 及び,
その対策としての連帯責任制 (グラミン銀行などで知られる) の役割につい
ての問題である.

1. 安全を予想: $0.1 = 0.9 \times r_s$ より, $r_s = 0.1/0.9 = 1/9(0.1111..)$
危険を予想: $0.1 = 0.6 \times r_r$ より, $r_r = 0.1/0.6 = 1/6(0.1666..)$

(失敗時に元本も保証されないとして, 以下も正答とする (以降も同様).)

安全を予想: $1.1 = 0.9 \times (1 + r_s)$ より, $r_s = 2/9(0.2222..)$

危険を予想: $1.1 = 0.6 \times (1 + r_r)$ より, $r_r = 5/6(0.8333..) \quad)$

2. 1) 貸し手が安全を予想し、借り手が安全を選択する場合
 $0.9 \times (0.26 - r_s) = 0.134$
 2) 貸し手が安全を予想するが、借り手が危険を選択する場合
 $0.6 \times (0.34 - r_s) = 0.13733..$
 3) 貸し手が危険を予想するが、借り手が安全を選択する場合
 $0.9 \times (0.26 - r_r) = 0.084$
 4) 貸し手が危険を予想し、借り手が危険を選択する場合
 $0.6 \times (0.34 - r_r) = 0.104$
 (上記の計算でプロジェクトの成功時の期待利潤しか考慮していないのは、失敗時には資産の無い借り手は何の責任も負わない (=0) と仮定しているからである.)
3. 二人共に安全なグループ: $0.9 \times 0.9 \times (0.26 - r) + 0.9 \times (1 - 0.9) \times (0.26 - r - 0.08)$
 あるいは, $0.9 \times (0.26 - r) - 0.9 \times (1 - 0.9) \times 0.08$
 二人共に危険なグループ: $0.6 \times 0.6 \times (0.34 - r) + 0.6 \times (1 - 0.6) \times (0.34 - r - 0.08)$
 あるいは, $0.6 \times (0.34 - r) - 0.6 \times (1 - 0.6) \times 0.08$
 (さらに簡略化して表現しても良い.)
4. $0.1 = 0.9 \times 0.9 \times r + (1 - 0.9) \times 0.9 \times 0.08 \times 2$ より,
 $r = 0.105679..$
 これを 3. で得られた式に代入して,
 二人共に安全: 0.1317
 二人共に危険: 0.1214

Question I.

1. Capital (K_t), output (Y_t), labor (L_t), investment (I_t), and savings (S_t).
2. We need to show that $F(\lambda K_t, \lambda L_t) = \lambda F(K_t, L_t)$ where λ is an arbitrary positive constant. Since $F(K_t, L_t) = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$, we have the following:

$$\underbrace{(\lambda K_t)^\alpha (\lambda L_t)^{1-\alpha}}_{=F(\lambda K_t, \lambda L_t)} = (\lambda^\alpha K_t^\alpha) (\lambda^{1-\alpha} L_t^{1-\alpha}) = \lambda^\alpha \lambda^{1-\alpha} K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} = \underbrace{\lambda K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}_{=\lambda F(K_t, L_t)}.$$

3. Divide the production function by the labor input, i.e., $\frac{F(K_t, L_t)}{L_t}$. Since the the production function's returns to scale is constant, we have the following:

$$\frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, \frac{L_t}{L_t}\right) = F(k_t, 1).$$

Since $F(k_t, 1) = k_t^\alpha$, we obtain $f(k_t) = k_t^\alpha$.

4. $S_t = I_t$.

5. From the production function, the capital accumulation equation, and the capital market equilibrium condition, the per capita capital accumulation follows:

$$k_{t+1} = \frac{sk_t^\alpha + (1 - \delta)k_t}{1 + n} \iff k_{t+1} - k_t = \frac{sk_t^\alpha - (n + \delta)k_t}{1 + n}.$$

Denote the steady state level of capital per capita as k^* . Then, we have $k_{t+1} = k_t = k^*$ at the steady state. Substituting this condition into the per capita capital accumulation equation above gives $k^* = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Question II. This is a question related to the occurrence of moral hazard in credit markets under asymmetric information and the role of joint liability mechanisms (known in microcredit institutions like Grameen Bank) as a solution.

1. Assume the safe project: $0.1 = 0.9 \times r_s$, so $r_s = 0.1/0.9 = 1/9(0.111111..)$
 Assume the risky project: $0.1 = 0.6 \times r_r$, so $r_r = 0.1/0.6 = 1/6(0.1666666..)$

(Assuming that the principal is not guaranteed even in the case of failure, the following are also correct answers (and the same applies hereafter).

Assume the safe project: $1.1 = 0.9 \times (1 + r_s)$, so, $r_s = 2/9(0.2222..)$

Assume the risky project: $1.1 = 0.6 \times (1 + r_r)$, so $r_r = 5/6(0.8333..)$

2. 1) Lender expects safe, borrower chooses risky:

$$0.9 \times (0.26 - r_s) = 0.134$$

- 2) Lender expects safe, borrower chooses risky:

$$0.6 \times (0.34 - r_s) = 0.137333..$$

- 3) Lender expects risky, borrower chooses safe:

$$0.9 \times (0.26 - r_r) = 0.084$$

- 4) Lender expects risky, borrower chooses safe:

$$0.6 \times (0.34 - r_r) = 0.104$$

3. For groups where both choose safe: $0.9 \times 0.9 \times (0.26 - r) + 0.9 \times (1 - 0.9) \times (0.26 - r - 0.08)$

$$\text{Alternatively, } 0.9 \times (0.26 - r) - 0.9 \times (1 - 0.9) \times 0.08$$

$$\text{For groups where both choose risky: } 0.6 \times 0.6 \times (0.34 - r) + 0.6 \times (1 -$$

$$0.6) \times (0.34 - r - 0.08)$$

$$\text{Alternatively, } 0.6 \times (0.34 - r) - 0.6 \times (1 - 0.6) \times 0.08$$

(You may simplify the expressions further if desired.)

$$4. \quad r = 0.105679..$$

Substituting this into the expressions obtained in 3.

Both choose safe: 0.1317

Both choose risky: 0.1214

経済思想 (Economic Thought)

出題の趣旨

問題Ⅰ．経済思想に関する基本的な知識を問う問題である．フランソワ・ケネーは，フランスにおける重農主義経済学の代表的な人物である．ケネーの「経済表」は，経済理論として有名である．経済思想の観点からケネーを評価する場合，当時のフランスの産業規制政策に対する，ケネーの見解が重要である．ケネーは，農業を再建するためのさまざまな政策を提案した．大農経営化，農業への投資，国際的な自由取引と穀物価格の安定化，税制改革などである．とりわけ，貨幣の流れが，農業への投資を促進するためには，不生産的な階級への貨幣の流れを変えるべきだと考えた点に，ケネーの見解が表れている．また，ケネーは，自然的秩序に基づく経済世界のあるべき姿を思想的に描いた．フィジオクラシーは，重農主義と訳されるが，自然が支配する秩序という意味である．ケネーは自然法を基礎にした人間の理性のあり方を，独自の仕方で論じた．

This question is designed to test basic knowledge of economic thought. François Quesnay is a leading figure in French of agrarian economics. Quesnay's "Economic Table" is famous as an economic theory. When evaluating him from the perspective of economic thought, it is important to note his views on the French policy of industrial regulation at the time. He proposed a variety of policies to rebuild agriculture, including the establishment of large agricultural enterprises, investment in agriculture, international free trade and stabilization of grain prices, and tax reform. Quesnay's view is especially expressed in his belief that the flow of money to the unproductive classes should be changed to encourage investment in agriculture. He also ideologically envisioned what an economic world based on natural order should look like. Physiocracy means an order in which nature rules. Quesnay discussed the nature of human reason based on natural law in a unique way.

問題Ⅱ．現代の経済思想に関する基本的な知識を必要とする問題である．ポランニーは20世紀に活躍したハンガリー生まれの思想家であり，主要な著作として『大転換』や『経済と文明』などがある．彼は経済史の研究を通じて自然や人間生活から乖離した市場経済に警鐘を鳴らし続けた．ポランニーによれば，資本主義以前の社会においては相互贈与に

基づく互酬・再分配などの経済活動がなされていた。だが資本主義が発達すると全国規模での市場が生まれ、労働力や土地が商品化されていき、経済活動は社会から離床した。その結果、市場システムと人間社会のあいだに緊張が生まれ、市場システムは生身の人間や自然環境を蝕み、大恐慌と大不況を生み出すことにより、人間社会を機能不全に陥らせた。ポランニーはこの現象を大転換と呼んで批判し、市場に代わる経済の在り方を模索した。本設問においては、このようなポランニーの思想の思想史的位置付けや思想の特徴を理解しているかが問われる。

This question requires a basic knowledge of contemporary economic thought. Polanyi was a Hungarian-born thinker active in the 20th century, whose major works include *The Great Transformation* and *Dahomey and the Slave Trade*. Through his studies of economic history, he continued to sound the alarm against a market economy that has diverged from nature and human life. According to Polanyi, in pre-capitalist societies, economic activities such as redistribution and reciprocity based on mutual gifts were carried out. However, with the development of capitalism, economic activities became detached from society due to the creation of a nationwide market and the commodification of labor and land. As a result, a tension arose between the market system and human society. The market system undermined human life and the natural environment, creating the Great Depression and the Great Recession, which in turn crippled human society. Polanyi criticized this phenomenon, calling it the Great Transformation, and sought an alternative economy to the market. In this question, examinees will be asked whether they understand the position of Polanyi's thought in the history of thought and the characteristics of his thought.

経営学(Management and Business Administration)

出題の趣旨・解答例

問題 I / Question I

本設問の趣旨は、経営組織論分野における基本知識の習得度を確認することである。リーダーシップに関するコンティンジェンシー理論とは、リーダーシップの有効性が状況によって異なるということに焦点を当て、その状況変数の特定を試みた理論を指す。こうした理論が登場した背景には、リーダーの特性（特性理論）やリーダーシップ行動（行動理論）の探索からは一貫した結果が見いだされず、状況要因が注目されるようになったことがある。①では、リーダーシップの理論の変遷の理解度を確認する。そのうえで、②で個々の理論の理解度について問う。具体的には、フィードラーによるモデルやリーダー・メンバー交換理論、パス・ゴール理論などについて、具体的な説明を求める。本設問への解答により、(1) 経営学、特に経営組織論の基本概念に関する理解の正確性、(2) 修士課程での学修に求められる論理的思考の力量を評価することができる。

This question aims to assess whether applicants have the basic knowledge of the leadership theory in organization theory. The first question assesses understanding of the evolution of leadership theory. Applicants need to explain the following points. First, the contingency theories of leadership state that the effectiveness of leadership depends on the situation. Second, the background of the emergence of these theories is that studies on leaders' traits and leadership behavior failed to derive consistent findings on effective leadership. As a result, researchers have shed light on situational factors to investigate effective leadership. Then, the second question assesses applicants' understanding of each theory (e.g., Fiedler's model, leader-member exchange theory (LMX), and path-goal theory).

The way applicants answer this question reveals both their understanding of the key concept in organization theory and their qualifications of logical and reasonable thinking skills.

問題 II / Question II

① サプライチェーンマネジメントとは、製品やサービスを提供するための資源

の調達から生産、流通、顧客への配送までの一連の活動を統合的に計画し、効率的かつ効果的にマネジ（管理）することを指す概念である。この目的は、顧客のニーズに合致する製品やサービスを適切な品質とコストで提供することにある。サプライチェーンマネジメントは、効率的な資源の利用、生産プロセスの最適化、リードタイムの短縮、在庫の最適化などを通じて企業の競争力を向上させるために重要である。

② サプライチェーンマネジメントの主要な機能として、調達、生産、物流がある。

調達：調達の目的は、必要な原材料や資源を適切な品質・数量・価格で確保することである。具体的な活動には、サプライヤーの選定、契約交渉、発注管理、品質管理、リスク評価などが含まれる。

生産：生産の目的は、需要に応じて製品を効率的かつ効果的に製造することである。具体的な活動には、生産計画の策定、生産設備の管理、生産ラインの効率化、品質管理、リーン生産手法の導入などが含まれる。

物流：物流の目的は、製品や情報の適切な流れを確保することである。具体的な活動には、在庫管理、輸送計画の策定、配送ネットワークの最適化、倉庫管理、リバーズロジスティクスなどが含まれる。

③ サプライチェーンにおけるリスク管理は、予期せぬ事象や変化による影響を最小限に抑え、サプライチェーンの継続的な安定性と信頼性を確保するために重要である。具体的なリスク管理手法には、リスク評価と予測、リスクの分散、サプライヤーの評価と監視、リスクマッピング、ビジネス継続性計画（BCP）の策定などがある。

④ 持続可能なサプライチェーンを構築するための手法や取り組みには以下のような具体例がある。

グリーンサプライチェーン：サプライヤーの環境負荷を評価し、環境に配慮した調達活動を行う。再生可能エネルギーの利用や廃棄物削減などの取り組みが含まれる。

倫理的な調達：労働条件や人権に配慮した調達活動を行う。フェアトレードの原則を尊重し、サプライヤーの労働条件や社会的影響を評価した上でサプライチェーンの構築を図る。

リサイクルリバーズロジスティクス：製品のリサイクルや再利用を促進するために、逆流する製品や資材の効果的な取り扱いとリサイクルプロセスの設計を行う。

これらの取り組みは、企業の社会的責任（CSR）や環境持続可能性への取り組みを示すものであり、企業のイメージ向上やリスク軽減、顧客の要求に応える

ための重要な要素である。

(1) Supply chain management is a concept that refers to the integrated planning and efficient and effective management of a series of activities from the procurement of resources to production, distribution, and delivery to customers in order to provide products and services. The objective is to provide products and services that meet customer needs with appropriate quality and cost. Supply chain management is important to improve the competitiveness of a company through efficient use of resources, optimization of production processes, reduction of lead time, optimization of inventory, etc.

(2) The main functions of supply chain management are procurement, production, and logistics.

Procurement: The purpose of procurement is to secure necessary raw materials and resources with appropriate quality, quantity and price. Specific activities include supplier selection, contract negotiation, order management, quality control, and risk assessment.

Production: The objective of production is to manufacture products efficiently and effectively to meet demand. Specific activities include production planning, production facility management, production line efficiency improvement, quality control, and implementation of lean manufacturing methods.

Logistics: The purpose of logistics is to ensure the proper flow of products and information. Specific activities include inventory management, transportation planning, distribution network optimization, warehouse management, and reverse logistics.

(3) Risk management in the supply chain is important to minimize the impact of unexpected events and changes and to ensure the ongoing stability and reliability of the supply chain. Specific risk management methods include risk assessment and forecasting, risk diversification, supplier assessment and monitoring, risk mapping, and business continuity plan (BCP) development.

(4) Methods and initiatives to build a sustainable supply chain include the following specific examples.

Green supply chain: Evaluate the environmental impact of suppliers and conduct environmentally conscious procurement activities. This includes initiatives such as the use of renewable energy and waste reduction.

Ethical Procurement: Suppliers are required to consider labor conditions and human rights in their procurement activities. Respect the principles of fair trade and evaluate suppliers' working conditions and social impacts in the supply chain.

Recycling and reverse logistics: Design effective handling and recycling processes for reverse flow products and materials to promote product recycling and reuse.

These efforts demonstrate a commitment to corporate social responsibility (CSR) and environmental sustainability, which are important elements for improving a company's image, reducing risk, and meeting customer demands.

会計学(Accounting)

出題の趣旨・解答例

問題Ⅰ 本問は、直接原価計算と全部原価計算の計算構造上の違いについて、理解しているかを問うている。

直接原価計算では、すべての製造原価を変動製造原価と固定製造原価に分類する。直接材料費や直接労務費は、通常、変動製造原価を構成する。製造間接費は、固定部分と変動部分に分離される。直接原価計算においては、変動製造原価（直接材料費、直接労務費、変動製造間接費）は、製品に直課されて製品原価を構成するが、固定製造間接費は、期間原価として処理される。

全部原価計算は、すべての製造原価で製品原価を計算する。したがって、2つの計算方法の違いは、固定製造原価の処理にある。全部原価計算は、製品の売価決定に有用であり、直接原価計算は、売上高と製品原価の関係が明確となるため、意思決定に有用である。

上記の内容に加えて、損益計算書の形式や、全部原価計算における在庫の問題等に言及してもよい。

問題Ⅱ 国際監査・保証基準審議会が公表している ISA200 によると、各リスクは次のように説明されている。

(1)監査リスクとは、財務諸表に重要な虚偽表示が存在する場合に、監査人が不適切な監査意見を表明するリスクをいう。

(2)固有リスクとは、関連する統制を考慮しない状態で、取引種類、勘定残高又は開示項目に関するアサーションが、個別に又は他の虚偽表示と集計した場合に、重要となり得る虚偽表示が生じる可能性をいう。

(3)統制リスクとは、取引種類、勘定残高又は開示項目に関するアサーションで発生し得る、そして、個別に又は他の虚偽表示と集計した場合に、重要となり得る虚偽表示が、企業の内部統制によって適時に防止されない、又は発見・是正されないリスクをいう。

(4)発見リスクとは、財務諸表に存在する虚偽の表示で、個別に又は他の虚偽表示と集計した場合に重要となり得る虚偽表示が、監査リスクを許容可能な低い水準に引き下げるために監査人が実施する手続によって発見できないリスクをいう。

Question I. This question asks whether you understand the difference between direct costing and total costing in terms of calculation structure.

Under direct costing, all manufacturing costs are classified into variable and fixed manufacturing costs. Direct materials and direct labor costs usually constitute variable manufacturing costs. Factory overhead costs are separated into fixed and variable portions. In direct costing, variable manufacturing costs (direct materials, direct labor costs, and variable factory overhead costs) are directly charged to products and constitute product costs, while fixed manufacturing overhead costs are treated as period costs.

Absorption costing calculates product cost using all manufacturing costs. Thus, the difference between the two calculation methods lies in the treatment of fixed manufacturing costs. Absorption costing is useful in determining the selling price of a product, and direct costing is useful in decision-making because it clarifies the relationship between sales and product cost.

In addition to the above, reference may be made to the format of the income statement, inventory issues in absorption costing, etc.

Question II. According to ISA 200 issued by IAASB,

(1) Audit Risk is the risk that the auditor expresses an inappropriate audit opinion when the financial statements are materially misstated.

(2) Inherent Risk is the susceptibility of an assertion about a class of transaction, account balance or disclosure to a misstatement that could be material, either individually or when aggregated with other misstatements, before consideration of any related controls.

(3) Control Risk is the risk that a misstatement that could occur in an assertion about a class of transaction, account balance or disclosure and that could be material, either individually or when aggregated with other misstatements, will not be prevented, or detected and corrected, on a timely

basis by the entity's internal control.

(4) Detection Risk is the risk that the procedures performed by the auditor to reduce audit risk to an acceptably low level will not detect a misstatement that exists and that could be material, either individually or when aggregated with other misstatements.

オペレーションズ・リサーチ(Operations Research)

出題の趣旨・解答例

[解答例]

問題 I. 令和5年8月入学試験における関連する出題は、ポートフォリオ選択問題を実際に解くことを主眼とした。本問題は、ポートフォリオ選択問題がいかにしてCAPMの導出に繋がったかを問うものである。

1.

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数} & \min_{w_0, w_A, w_B} \sigma_A^2 w_A^2 + 2\sigma_{AB} w_A w_B + \sigma_B^2 w_B^2 \\ \text{制約式} & \begin{cases} r w_0 + \mu_A w_A + \mu_B w_B = \mu \\ w_0 + w_A + w_B = 1 \end{cases} \end{array}$$

2. ラグランジュ乗数を λ_1, λ_2 とすると,

$$2\sigma_A^2 w_A + 2\sigma_{AB} w_B + \lambda_1 \mu_A + \lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$2\sigma_B^2 w_B + 2\sigma_{AB} w_A + \lambda_1 \mu_B + \lambda_2 = 0 \quad (2)$$

$$r \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (3)$$

$$r w_0 + \mu_A w_A + \mu_B w_B = \mu \quad (4)$$

$$w_0 + w_A + w_B = 1. \quad (5)$$

3. まず,

$$\begin{aligned} \sigma_{AP} &= E[(R_A - \mu_A)(w_0 r + w_A R_A + w_B R_B - \mu)] \\ &= E[(R_A - \mu_A)^2 w_A + (R_A - \mu_A)(R_B - \mu_B) w_B] \\ &= V[R_A] w_A + \text{Cov}[R_A, R_B] w_B \end{aligned} \quad (6)$$

より,

$$\sigma_{AP} = \sigma_A^2 w_A + \sigma_{AB} w_B. \quad (7)$$

同様に,

$$\sigma_{BP} = \sigma_B^2 w_B + \sigma_{AB} w_A. \quad (8)$$

4. まず, (3) を用いて, (1) から λ_2 を消去して, (7) を用いると,

$$2\sigma_{AP} + \lambda_1(\mu_A - r) = 0. \quad (9)$$

同様に,

$$2\sigma_{BP} + \lambda_1(\mu_B - r) = 0. \quad (10)$$

次に

$$\sigma_P^2 = \sigma_A^2 w_A^2 + 2\sigma_{AB} w_A w_B + \sigma_B^2 w_B^2$$

なので, (1)× w_A + (2)× w_B より,

$$2\sigma_P^2 + \lambda_1(\mu_A w_A + \mu_B w_B) + \lambda_2(w_A + w_B) = 0. \quad (11)$$

ここで, (3) を用いて λ_2 を消去して,

$$2\sigma_P^2 + \lambda_1(\mu_A w_A + \mu_B w_B) - r\lambda_1(w_A + w_B) = 0. \quad (12)$$

さらに, (5) を用いると,

$$2\sigma_P^2 + \lambda_1(\mu_A w_A + \mu_B w_B + r w_0 - r) = 0. \quad (13)$$

最後に, (4) より,

$$2\sigma_P^2 + \lambda_1(\mu - r) = 0. \quad (14)$$

結局, (9), (10), (14) において, $\sigma_{AP} = \sigma_A \sigma_P \rho_{AP}$, $\sigma_{BP} = \sigma_B \sigma_P \rho_{BP}$ に注意すると, 目的とする式を得る.

5. いくつかの仮定の下で (4) で示した式は CAPM の結論となる. 例えば, その仮定を述べ, また接点ポートフォリオがなぜ市場ポートフォリオに一致するかを述べよ.
6. 横軸に標準偏差, 縦軸をリターンとして, 有効フロンティアを双曲線として描くこと. また, 資本市場線として切片 $(0, r)$ から有効フロンティアへの接線を描き, 接点を接点ポートフォリオと明示せよ.

問題 II.

1. 新しい非負変数 y を導入し, (P) を以下のように変換する. 作成した問題を (P1) と記す.

$$\begin{aligned} \text{問題 (P1)} \quad & \min && 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & \text{subject to:} && \\ &&& x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 24 \\ &&& 3x_2 - x_3 - y = -4 \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

次に, (P1) の初期実行可能基底解を $(x_1, x_2, x_3, y) = (24, 0, 0, 4)$ として辞書を作る.

$$\begin{aligned} z &= 96 + 22x_2 - 9x_3 \\ x_1 &= 24 + 5x_2 - 3x_3 \\ y &= 4 + 3x_2 - x_3 \end{aligned}$$

一行目 (目的関数に関する行) に、係数が負である非基底変数 (右辺の変数) があるので、現在の解は最適でない。係数が負の x_3 を 0 から 4 に増加させ、辞書を更新する。

$$\begin{aligned} z &= 60 - 5x_2 + 9y \\ x_1 &= 12 - 4x_2 + 3y \\ x_3 &= 4 + 3x_2 - y \end{aligned}$$

一行目 (目的関数に関する行) に、係数が負である非基底変数 (右辺の変数) があるので、現在の解は最適でない。係数が負の x_2 を 0 から 3 に増加させ、辞書を更新する。

$$\begin{aligned} z &= 45 + \frac{5}{4}x_1 + \frac{21}{4}y \\ x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}y \\ x_3 &= 13 - \frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{4}y \end{aligned}$$

一行目 (目的関数に関する行) の非基底変数 (右辺の変数) の係数がすべて非負なので、現在の解は最適である。最適解は $(x_1, x_2, x_3, y) = (0, 3, 13, 0)$ で、最適値は 45 である。

2. 問題 (P) の双対問題 (D) は、以下の通りである。

$$\begin{aligned} \text{問題 (D)} \quad & \max \quad 24z_1 - 4z_2 \\ & \text{subject to:} \\ & \quad z_1 \leq 4 \\ & \quad -5z_1 + 3z_2 \leq 2 \\ & \quad 3z_1 - z_2 \leq 3 \\ & \quad z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3. $\mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ y)$, $\mathbf{c}^T = (4 \ 2 \ 3 \ 0)$, $\mathbf{b}^T = (24 \ -4)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ を用いて、問題 (P1) は以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \text{問題 (P1)} \quad & \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to:} \\ & \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

最適解において、基底変数は x_2, x_3 であるため、基底行列 \mathbf{B} , 非基底行列 \mathbf{N} , 目的関数における基底変数の係数ベクトル \mathbf{c}_B , 非基底変数の係数ベクトル \mathbf{c}_N は、

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

変動後の問題は、 \mathbf{c}_B^T が $\mathbf{c}'_B^T = (2 - t \ 3)$ に、 \mathbf{c}_N^T が $\mathbf{c}'_N^T = (4 + t \ 0)$ に置き換わった問題である。変動後においても、最適解が変わらないのは、

$$\mathbf{c}'_N^T - \mathbf{c}'_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq \mathbf{0}$$

をみたすときであるため、求める t の範囲は、 $-1 \leq t \leq 7$ である。

Question I. The related questions in the August 2023 entrance exam focused on actually solving portfolio selection questions. This problem asks how the portfolio selection problem led to the derivation of CAPM.

1 .

$$\begin{aligned} \min_{w_0, w_A, w_B} \quad & \sigma_A^2 w_A^2 + 2\sigma_{AB} w_A w_B + \sigma_B^2 w_B^2 \\ \text{s.t} \quad & \begin{cases} r w_0 + \mu_A w_A + \mu_B w_B = \mu \\ w_0 + w_A + w_B = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2 . Let Lagrange multipliers λ_1, λ_2 . Then,

$$2\sigma_A^2 w_A + 2\sigma_{AB} w_B + \lambda_1 \mu_A + \lambda_2 = 0 \quad (15)$$

$$2\sigma_B^2 w_B + 2\sigma_{AB} w_A + \lambda_1 \mu_B + \lambda_2 = 0 \quad (16)$$

$$r \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \quad (17)$$

$$r w_0 + \mu_A w_A + \mu_B w_B = \mu \quad (18)$$

$$w_0 + w_A + w_B = 1. \quad (19)$$

3 . From

$$\begin{aligned} \sigma_{AP} &= E[(R_A - \mu_A)(w_0 r + w_A R_A + w_B R_B - \mu)] \\ &= E[(R_A - \mu_A)^2 w_A + (R_A - \mu_A)(R_B - \mu_B) w_B] \\ &= V[R_A] w_A + Cov[R_A, R_B] w_B, \end{aligned} \quad (20)$$

we see

$$\sigma_{AP} = \sigma_A^2 w_A + \sigma_{AB} w_B. \quad (21)$$

Similar to this, we have

$$\sigma_{BP} = \sigma_B^2 w_B + \sigma_{AB} w_A. \quad (22)$$

4. First, diminish λ_2 from (15) by (17). Then, (21) implies

$$2\sigma_{AP} + \lambda_1(\mu_A - r) = 0. \quad (23)$$

Similarly,

$$2\sigma_{BP} + \lambda_1(\mu_B - r) = 0. \quad (24)$$

Next, combining

$$\sigma_P^2 = \sigma_A^2 w_A^2 + 2\sigma_{AB} w_A w_B + \sigma_B^2 w_B^2,$$

with $(15) \times w_A + (16) \times w_B$ yields

$$2\sigma_P^2 + \lambda_1(\mu_A w_A + \mu_B w_B) + \lambda_2(w_A + w_B) = 0. \quad (25)$$

Then, deleting λ_2 from this by (17) follows

$$2\sigma_P^2 + \lambda_1(\mu_A w_A + \mu_B w_B) - r\lambda_1(w_A + w_B) = 0. \quad (26)$$

Further, (19) implies

$$2\sigma_P^2 + \lambda_1(\mu_A w_A + \mu_B w_B + r w_0 - r) = 0. \quad (27)$$

Finally, from (18) we have

$$2\sigma_P^2 + \lambda_1(\mu - r) = 0. \quad (28)$$

As a result, considering $\sigma_{AP} = \sigma_A \sigma_P \rho_{AP}$ and $\sigma_{BP} = \sigma_B \sigma_P \rho_{BP}$, we assure that the result is given from (23), (24), and (28).

5. Under some assumptions, the formula shown in (4) becomes the conclusion of CAPM. For example, state the assumptions and explain why the tangency portfolio matches the market portfolio.
6. Plot the efficiency frontier as a hyperbola, with standard deviation on the horizontal axis and return on the vertical axis. Also, draw a tangent line from the intercept $(0, r)$ to the efficiency frontier as a capital market line, and specify the tangent point as the tangency portfolio.

Question II.

1. After introducing a nonnegative variable y , transform the problem (P) into the following equivalent standard form (P1).

$$\begin{aligned}
(\text{P1}) \quad & \min \quad 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
& \text{subject to:} \\
& x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 24 \\
& 3x_2 - x_3 - y = -4 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y \geq 0
\end{aligned}$$

Construct a dictionary with a basic feasible solution $(x_1, x_2, x_3, y) = (24, 0, 0, 4)$.

$$\begin{aligned}
z &= 96 + 22x_2 - 9x_3 \\
x_1 &= 24 + 5x_2 - 3x_3 \\
y &= 4 + 3x_2 - x_3
\end{aligned}$$

The current solution is not optimal, since the first line of the dictionary corresponding to the objective function has a nonbasic variable with a positive coefficient. By increasing x_3 (a nonbasic variable with a positive coefficient) from 0 to 4, rewrite the dictionary.

$$\begin{aligned}
z &= 60 - 5x_2 + 9y \\
x_1 &= 12 - 4x_2 + 3y \\
x_3 &= 4 + 3x_2 - y
\end{aligned}$$

The current solution is not optimal, since the first line of the dictionary corresponding to the objective function has a nonbasic variable with a positive coefficient. By increasing x_2 (a nonbasic variable with a positive coefficient) from 0 to 3, rewrite the dictionary.

$$\begin{aligned}
z &= 45 + \frac{5}{4}x_1 + \frac{21}{4}y \\
x_2 &= 3 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}y \\
x_3 &= 13 - \frac{3}{4}x_1 + \frac{5}{4}y
\end{aligned}$$

The current solution is optimal, since the first line of the dictionary corresponding to the objective function has no nonbasic variable with a positive coefficient. An optimal solution is $(x_1, x_2, x_3, y) = (0, 3, 13, 0)$, and the optimal value is 45.

2. The dual problem (D) of (P) is described as follows.

$$\begin{aligned}
(\text{D}) \quad & \max \quad 24z_1 - 4z_2 \\
& \text{subject to:} \\
& z_1 \leq 4 \\
& -5z_1 + 3z_2 \leq 2 \\
& 3z_1 - z_2 \leq 3 \\
& z_2 \geq 0
\end{aligned}$$

3. By using $\mathbf{x}^T = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ y)$, $\mathbf{c}^T = (4 \ 2 \ 3 \ 0)$, $\mathbf{b}^T = (24 \ -4)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, the problem (P1) can be represented in the following manner.

$$\begin{aligned} \text{(P1)} \quad & \max \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ & \text{subject to:} \\ & \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Since the basic variables in the optimal solution for (P1) are x_2 and x_3 , the basic matrix \mathbf{B} and the nonbasic matrix \mathbf{N} are

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

In the objective function, the coefficient vector \mathbf{c}_B of the basic variables and the coefficient vector \mathbf{c}_N of the nonbasic variables are

$$\mathbf{c}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_N = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The modified problem is obtained from the problem (P1) by replacing \mathbf{c}_B^T (resp., \mathbf{c}_N^T) with $\mathbf{c}'_B^T = (2 - t \ 3)$ (resp., $\mathbf{c}'_N^T = (4 + t \ 0)$). The range of t , for which the optimal solution of (P) remains optimal in the modified problem, is one satisfying

$$\mathbf{c}'_N^T - \mathbf{c}'_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{N} \geq \mathbf{0}.$$

Hence, the optimal solution remains unchanged as long as $-1 \leq t \leq 7$.