

北海道大学大学院経済学院
修士課程（博士コース、専修コース）入学試験

令和6年度 専門科目 試験問題

試験期日：令和5年8月17日

試験時間：9時00分～10時30分

解答上の注意

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはならない。
2. 問題は、

マクロ及びミクロ経済学	1～6 ページ
経済思想	7 ページ
統計学	8～12 ページ
経営学	13 ページ
会計学	14 ページ
オペレーションズ・リサーチ	15～18 ページ

である。
3. 問題冊子の中から出願時に選択した科目について解答しなさい。
4. 受験番号、氏名、選択科目は、監督員の指示にしたがって解答用紙の指定された箇所に記入しなさい。
5. 解答用紙に解答する際に、問題番号・記号があれば解答の前に必ず記入しなさい。
6. 解答用紙が不足した場合は挙手して監督員に連絡しなさい。
7. 試験途中での試験場退出は、体調不良等を除き認めない。

**Graduate School of Economics and Business, Hokkaido University
Admission Examination for Master's Program**

Exam Questions Booklet: Specialized Subject for 2024 intake

Date of Exam: August 17, 2023

Time : 9:00~10:30 a.m.

Instructions

1. Do not open this examination booklet until the signal for starting the test is given.
2. This booklet is composed of the following parts:

Macroeconomics and Microeconomics	pp. 1~6
Economic Thought	p. 7
Statistics	pp. 8~12
Management and Business Administration	p. 13
Accounting	p. 14
Operations Research	pp. 15~18
3. Answer the question(s) of the subject you selected and reported upon the application.
4. Write your examinee's number, your name, and the subject in the specified place, following the instructions given by the proctor.
5. Be sure to indicate the question number of each question you answer.
6. Raise your hand to notify a proctor if you need more answer sheets.
7. Do not leave the examination room in the middle of the exam unless you are in sick or other emergency reasons.

マクロ及びミクロ経済学

以下の1～7から3題を選択して答えなさい。3題を超えて解答しないこと。なお、解答は日本語、英語、または両者の混合によって解答して構わない。

Choose THREE questions from questions 1 to 7 below. Do not answer more than three questions. When you answer, you can use English and/or Japanese.

1. 経済成長率 (Growth rate)

【Japanese version】

この問題は英文のみ存在する。

【English version】

Suppose that each year a certain country's output is determined by the following production function

$$Y = AK^\alpha H^\beta L^{1-\alpha-\beta},$$

where Y is the aggregate output, A is the technology level, K is the stock of physical capital, H is the stock of human capital, L is the working population, and $\alpha \in (0, 1)$ and $\beta \in (0, 1)$ satisfy $\alpha + \beta < 1$. In the following, lowercase letters denote amounts per person: $y \equiv Y/L$, $k \equiv K/L$, and $h \equiv H/L$.

Suppose that from year 1 to year 2, the technology level, the stock of physical capital per person, and the stock of human capital per person each grew by 1%. Approximately, how much did the output per person increase in this country? Explain. In your answer, use the approximation $\log(1+x) \approx x$.

2. 独占企業と競争的企業 (Monopolistic vs competitive firms)

【Japanese version】

この問題は英文のみ存在する。

【English version】

Firm X manufactures some product, for which the inverse demand function

is given by $p = D(y)$, where p is the price of the product and y is the quantity of the product. In the following, we assume

$$D(y) = ay^{-b},$$

where $a > 0$ and $b \in (0, 1)$ are given parameters. The total cost of producing y units of the product is given by cost function $C(y) = \frac{c}{2}y^2$, $c > 0$.

- (1) Suppose that X acts as a monopolistic firm. Find the equilibrium quantity in that case.
- (2) Suppose that X acts as a price-taker. Find the equilibrium quantity in that case. Compare the result with that of the previous question.

3. 期待効用 (Expected utility)

【Japanese version】

今、ある人の効用値が期待効用 $E[u(x)]$ で表されるとしよう。ここで u は $u(x) = -e^{-\rho x}$, $\rho > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$ で与えられる。この人は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うくじに直面している。 μ は平均、 σ^2 は分散である。この人の効用値を明示的に計算しなさい。このくじの確実同値額はいくらか。

(ヒント：確率変数 z が標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う場合、その確率密度関数は $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ で与られる。)

【English version】

Suppose that someone's utility value is represented by the "expected utility" $E[u(x)]$ for which u is given by $u(x) = -e^{-\rho x}$, $\rho > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$. Suppose that she faces a lottery that follows a normal distribution $N(\mu, \sigma^2)$, where μ is the mean and σ^2 is the variance. Calculate explicitly the utility value. How much is the certainty equivalent of this lottery in this case? Explain.

(Hint: If a random variable z follows the standard normal distribution $N(0, 1)$, the probability density function is given by $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$.)

4. タダ乗りゲーム (Free-riding game)

【Japanese version】

以下のような3プレーヤーによるタダ乗りゲームを考える。利得の構造は以下の通りである。各プレーヤーは 'Act' または 'Not act' のうちいずれかの行動を採ることができる。もし2人以上のプレーヤーが Act を選べば、公共

の目標が達成され、全員が効用ポイント1を得る。‘Act’を選ぶことには個人的な費用 C ($0 < C < 1$) が伴う。もしある人が‘Act’を選び、公共の目標が達成された場合は、その人の合計利得は $1 - C$ ポイントである。もしある人が‘Act’を選び、公共の目標が達成されない場合は、その人の合計利得は $-C$ ポイントである。‘Not act’を選んだ人には、費用は生じない。この場合この人の合計利得は、公共の目標が達成されれば1、達成されなければ0である。

- (1) 純粋戦略ナッシュ均衡はいくつ存在するか。説明しなさい。
- (2) $C = 0.18$ のとき、対称な混合戦略均衡（複数存在しうる）を見つけなさい。

【English version】

Consider a free-riding game of 3 players with the following payoff structure. Each player can take one of the two actions: ‘Act’ or ‘Not act’. If at least 2 players act, then the public goal is achieved and everyone gets 1 utility point. Acting incurs personal cost of C ($0 < C < 1$). If one chooses ‘Act’ and the public goal is achieved, then one’s total payoff is $1 - C$ utility points. If one chooses ‘Act’ and the public goal is not achieved, then one’s total payoff is $-C$ utility points. If one chooses ‘Not act’, then she does not bear any cost. In this case, her total payoff is 1 utility point if the public goal is achieved and 0 utility points if the public goal is not achieved.

- (1) How many pure-strategy Nash equilibria exist? Explain.
- (2) Suppose $C = 0.18$. Find symmetric mixed-strategy equilibria.

5. クールノー競争 (Cournot competition)

【Japanese version】

同質財を生産する二企業によるクールノー競争を考える。企業の限界費用はそれぞれ、企業1が c_1 、企業2が c_2 とする。また逆需要関数は、 $P = a - Q$ の形で与えられ、 $Q = q_1 + q_2$ 、 q_1 と q_2 はそれぞれ企業1と企業2への需要量を表す。パラメータの条件として、 $c_1 < a$ 、 $c_2 < \frac{a+c_1}{2}$ を仮定する。

- (1) このモデルのクールノー＝ナッシュ均衡を求めなさい。均衡における各企業の生産量と価格は何か？
- (2) 均衡における各企業の利潤、消費者余剰、生産者余剰を求めなさい。

[English version]

Consider a Cournot model of two firms that produce homogeneous products. Their marginal production cost is constant, c_1 for firm 1 and c_2 for firm 2. The (inverse) demand function is given by $P = a - Q$ where $Q = q_1 + q_2$, and q_1 and q_2 denote demand for firms 1 and 2, respectively. Assume that both $c_1 < a$ and $c_2 < \frac{a+c_1}{2}$ hold.

- (1) Derive Cournot-Nash equilibrium of this model. What are equilibrium quantities and price?
- (2) Derive equilibrium profits, consumer surplus, and producer surplus.

6. 費用最小化 (Cost minimization)

[Japanese version]

以下のような企業の費用最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} \min_{K,L} \quad & rK + wL \\ \text{s.t.} \quad & F(K, L) \geq \bar{y}. \end{aligned}$$

ここで生産関数は Cobb-Douglas 型 $F(K, L) = zK^aL^{1-a}$ で、 K は資本投入量、 L は労働投入量、 $z > 0$ と $a \in (0, 1)$ は与えられたパラメータである。資本と労働の価格はそれぞれ r と w である。最後に、 \bar{y} は最低限要求される生産量である。

- (1) 未定乗数を λ とした Lagrange 関数を定義し、解 (K^*, L^*, λ) が満たすべき一階条件を導出しなさい。
- (2) (K^*, L^*, λ) を明示的に解きなさい。
- (3) 最小化された費用は \bar{y} に関して線形であることを示しなさい。

[English version]

Consider the following cost-minimization problem of a firm:

$$\begin{aligned} \min_{K,L} \quad & rK + wL \\ \text{s.t.} \quad & F(K, L) \geq \bar{y}. \end{aligned}$$

Above, the production function is Cobb-Douglas: $F(K, L) = zK^aL^{1-a}$, where K and L are the amounts of capital input and labor input respectively, and $z > 0$ and $a \in (0, 1)$ are given parameters. The prices of capital and of labor are denoted as r and w , respectively. Finally, \bar{y} is the minimum required amount of production.

- (1) Define the Lagrangian function with a multiplier λ , and derive the first-order conditions for the solution (K^*, L^*, λ) .
- (2) Solve for (K^*, L^*, λ) explicitly.
- (3) Show that the minimized cost is linear in \bar{y} .

7. 製品差別化 (Product differentiation)

【Japanese version】

垂直的な製品差別化（品質の差別化）がある下での価格競争を考える。市場には二企業が存在するとして、各企業の品質は、 v_i , $i = 1, 2$ で与えられ、 $v_2 > v_1$, $v_i \in [1, 2]$ である状況を考える。また企業の費用関数は、 $C(q_i) = cv_i q_i$ で与えられる。一方消費者は品質評価に関して異質的であり、各消費者の品質評価の度合いは b で表されるとし、 b は $[2, 8]$ 上に一様分布しているとする。また消費者の総数は 6 に基準化して考える。各消費者は企業 1, もしくは企業 2 から一単位だけ財を購入するとし、企業 1 から購入した時の効用は $u_1 = \frac{bv_1}{6} - p_1$, 企業 2 から購入した時の効用は $u_2 = \frac{bv_2}{6} - p_2$ であるとする。ここで p_i は各企業の設定する価格を表す ($i = 1, 2$)。

- (1) 企業 1 と企業 2 から財を購入するのが無差別となるような消費者 \bar{b} を、価格と品質の関数として求めなさい。また、各企業の直面する需要を価格と品質の関数として求めなさい。
- (2) 企業 1 と企業 2 の均衡における価格と利潤を求めなさい。
- (3) ここで、各企業は上記の価格競争を行う前に自企業の品質選択を行う状況を考える。また、当初は $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ であるとする。このときに、企業 1 は財の品質 v_1 を向上させるインセンティブを持つであろうか? その答えと直観を議論しなさい。

【English version】

Consider a model of price competition under vertical product differentiation (i.e., quality difference across firms). There are two firms whose product quality is denoted by v_i for $i = 1, 2$, with $v_2 > v_1$ and $v_i \in [1, 2]$. The cost function depends on their own product quality: $C(q_i) = cv_i q_i$. Consumers are heterogeneous in the way they value quality, denoted by b , which is distributed uniformly on $[2, 8]$. The number of consumers is normalized to 6. They consume one of the two products and utility obtained is $u_1 = \frac{bv_1}{6} - p_1$ if purchasing from firm 1 and $u_2 = \frac{bv_2}{6} - p_2$ if purchasing from firm 2. p_i is the price by firm i ($i = 1, 2$).

- (1) Derive consumer \bar{b} , as a function of prices and qualities, that is indifferent between purchasing products from firms 1 and 2. Derive also demand faced by each firm as a function of prices and qualities.
- (2) What are equilibrium prices and profits of firms 1 and 2?
- (3) Suppose that firms can choose their own product quality before facing the price competition described so far. Suppose also that originally $v_1 = 1$ and $v_2 = 2$. Is there incentive for firm 1 to increase their product quality v_1 ? Discuss its economic intuition.

経済思想

日本語問題文 (Japanese Version)

問題Ⅰ，問題Ⅱの両方に解答しなさい。

問題Ⅰ． K. マルクスの経済思想について、自由に論じなさい。

問題Ⅱ． A. センの学問的功績について説明しなさい。

英語問題文 (English Version)

Answer the following two questions, Question I and Question II.

Question I. Explain K. Marx' contribution to the economic thought.

Question II. Explain A. Sen's scholarly contributions.

統計学

日本語問題文(Japanese Version)

問題 I と問題 II の両方に解答しなさい。

問題 I. 1979-1980 年における, 米国男性の喫煙量に関するデータを用いて, 1 日あたりのタバコの喫煙量 (*cigs*) を被説明変数に, 所得の対数値 (*lincome*), タバコ価格の対数値 (*lcigpric*), 教育年数 (*educ*), 年齢 (*age*), 年齢の 2 乗 (*agesq*), 飲食店でタバコが禁止されている地域かどうかというダミー変数 (*restaurn*) を説明変数にして, 最小 2 乗法 (OLS) で回帰分析をおこなったところ, 次の表の結果が得られた. 括弧内の値は標準誤差を表す.

	cigs. smoked per day
lincome	0.880 (0.728)
lcigpric	-0.751 (5.773)
educ	-0.501*** (0.167)
age	0.771*** (0.160)
agesq	-0.009*** (0.002)
restaurn	-2.825** (1.112)
Constant	-3.640 (24.079)
Observations	807
R ²	0.053
Adjusted R ²	0.046
Residual Std. Error	13.405
F Statistic	7.423***

Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

以下のすべての問いに答えなさい。

1. *restaurn* の係数の推定値を解釈しなさい。
2. *educ* 係数の推定値の t 値を求めなさい。
3. 年齢が喫煙量に与える影響が負に転じる年齢を、小数第二位を四捨五入して、答えなさい。
4. 誤差項の均一分散の仮定が成立しないとき、OLS 推定量の最良線形不偏推定量の性質に与える影響について説明しなさい。
5. 誤差項の均一分散の仮定を検定するための検定をおこなうことを考えている。検定の名前とその手順を説明しなさい。
6. 誤差項の分散が、所得の対数値に比例して大きくなることが判明し、 $\text{Var}(u) = \sigma^2 \text{lincome}$ という関係があることがわかった。この情報を使って不均一分散を修正しながら係数を推定するためにはどうすればよいか。推定手法の手順を説明しなさい。
7. *educ* の変数は内生性を持つ可能性がある。
 - (1) ある変数に内生性があるとはどのような状況を指すのか説明しなさい。
 - (2) 内生性が生じている場合、OLS 推定量はどのような影響を受けるのかについて説明しなさい。
 - (3) *educ* が内生性を持つ場合、どのようなアプローチでモデルを推定すればよいか。推定手法の名前とその手順について簡潔に説明しなさい。

問題 II. パラメータ p を持つベルヌーイ分布を母集団分布とし、そこから無作為に抽出した大きさ n の標本を $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ と表記する。ここですべての確率変数 X_i は独立で、以下の実現パターンを持つ。

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{with probability } p \\ 0 & \text{with probability } 1 - p \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

以下のすべての問いに答えなさい。

1. 確率変数 X_i の平均と分散を求めなさい。
2. 標本平均 (標本比率), $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ の平均と分散を求めなさい。

3. $\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ と $\frac{n(\bar{X}-p)^2}{p(1-p)}$ の漸近的な標本分布が何であることを述べなさい (証明は必要ない).
4. $c_{0.95}$ を以下の関係を満たす定数とする.

$$\Pr \left[\frac{n(\bar{X}-p)^2}{p(1-p)} \leq c_{0.95} \right] = 0.95$$

この定数 $c_{0.95}$ を用いて, パラメータ p に関する 95% 信頼区間を求めなさい.

5. 標本比率を推定する際, “four plus rule” と呼ばれる推定方法が用いられることがある. その定義は $\frac{\sum_{i=1}^n X_i + 2}{n+4}$ である. これまでの回答結果に基づいて, “four plus rule” 推定法はどのような考え方に基づいた推定方法であるか, またどのような状況でどのような理由でこの方法を用いるか, という点について簡潔に述べなさい. 必要であれば, 標準正規分布の 97.5% 点がほぼ 2 であることを用いてもよい.

英語問題文(English Version)

Answer both Question I and Question II.

Question I. Using data on the smoking habits of U.S. males for the years 1979-1980, a multiple regression analysis was performed using the number of cigarettes smoked per day (*cigs*) as the dependent variable and the following variables as independent variables: the logarithm of income (*lincome*), the logarithm of cigarette price (*lcigpric*), years of education (*educ*), age (*age*), age squared (*agesq*), and a dummy variable indicating whether smoking is prohibited in restaurants (*restaurn*). The results of the regression analysis are presented in the following table, with values in parentheses representing standard errors.

Answer the following all questions:

1. Interpret the estimated coefficient of *restaurn*.

	cigs. smoked per day
lincome	0.880 (0.728)
lcigpric	-0.751 (5.773)
educ	-0.501*** (0.167)
age	0.771*** (0.160)
agesq	-0.009*** (0.002)
restaurn	-2.825** (1.112)
Constant	-3.640 (24.079)
Observations	807
R ²	0.053
Adjusted R ²	0.046
Residual Std. Error	13.405
F Statistic	7.423***

Note: *p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

- Calculate the t-value for the estimated coefficient of *educ*.
- Identify the age at which the effect of age on smoking turns negative. Round to the nearest second decimal place and give the answer in the first decimal place.
- Explain the impact on the properties of the Ordinary Least Squares (OLS) estimators when the assumption of homoskedasticity in the error term is violated.
- Consider conducting a test to check the assumption of homoskedasticity in the error term. Provide the name of the test and briefly describe its procedure.
- If it is discovered that the variance of the error term increases proportionally with the logarithm of income, leading to $Var(u) = \sigma^2 \ln income$, explain how to estimate the coefficients while correcting for heteroscedasticity. Describe the procedure of the estimation method.

7. The variable *educ* may be endogenous.

- (1) Explain what endogeneity refers to in this context.
- (2) Describe the impact on OLS estimators when endogeneity is present.
- (3) If *educ* is considered endogenous, explain an approach to estimate the model. Provide the name of the estimation method and briefly describe its procedure.

Question II. Consider a random sample of size n from the Bernoulli distribution with parameter p . The sample is denoted as $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, where all X_i s are independent and

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{with probability } p \\ 0 & \text{with probability } 1 - p \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Answer the following all questions.

1. Find the mean and the variance of the random variable X_i .
2. Find the mean and the variance of the sample mean (the sample proportion), $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
3. State what the asymptotic sampling distributions of $\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ and $\frac{n(\bar{X} - p)^2}{p(1-p)}$ are (no need to prove them).
4. Let $c_{0.95}$ be the constant which satisfies the following relationship,

$$\Pr \left[\frac{n(\bar{X} - p)^2}{p(1-p)} \leq c_{0.95} \right] = 0.95.$$

Using the constant $c_{0.95}$, find the 95% confidence interval of the parameter p .

5. The “four plus rule” estimate of the sample proportion, defined as $\frac{\sum_{i=1}^n X_i + 2}{n + 4}$, is sometimes used in practice. Based on the above results, briefly explain the intuition behind the “four plus rule” estimate and why (or when) this estimate would be used. If necessary, you can use the fact that the 97.5% point of the standard normal distribution is almost 2.

経営学

問題Ⅰ，問題Ⅱの両方に解答しなさい。

問題Ⅰ．SCP モデルを具体的に説明し，その意義と限界を述べなさい。

問題Ⅱ．機能（職能）別の組織構造に関して，その①基本的特徴，②長所，および③短所を説明しなさい。

Answer the following two questions, Question I and Question II.

Question I. Explain the SCP model and its theoretical contributions and limitations.

Question II. Explain the (1) basic characteristics, (2) strengths, and (3) weaknesses of the functional structure.

会計学

日本語問題文 (Japanese Version)

問題Ⅰ，問題Ⅱの両方に解答しなさい。

問題Ⅰ．繰延資産の具体例をひとつ示したうえで，それが概念フレームワークにおける資産の定義を満たしているかどうかを説明しなさい。概念フレームワークは，わが国の企業会計基準委員会（ASBJ）のほか，国際会計基準審議会（IASB）の公表したものでもかまわない。

問題Ⅱ．戦略的コスト・マネジメントとしての原価企画（目標原価計算）について，標準原価計算と対比させながらその特徴を説明しなさい。

英語問題文 (English Version)

Answer the following two questions, Question I and Question II.

Question I. Explain the objective of Deferred Assets with specific example, and determine whether or not the item meets the definition of an asset in the Conceptual Framework. Applicants can choose the Conceptual Framework issued by the ASBJ (Accounting Standards Board of Japan), or the IASB (International Accounting Standards Board).

Question II. Explain the characteristics of target costing as strategic cost management, contrasting it with standard costing.

オペレーションズ・リサーチ

問題 I, 問題 II, 問題 III のすべてに解答しなさい。

問題 I. 以下の 1, 2 のすべてに答えなさい。

1. 株式 A, 株式 B, 無リスク資産のみが存在する市場でポートフォリオ選択を行う。ある一期間における無リスク資産の収益率を確定的で r とする。また, 株式 A, B の収益率を確率変数 R_A, R_B で表し, その期待値を $E[R_A] = \mu_A$, $E[R_B] = \mu_B$, 分散を $V[R_A] = \sigma_A^2$, $V[R_B] = \sigma_B^2$, 共分散を $Cov[R_A, R_B] = \sigma_{AB}$ と書く。
 - (1) 無リスク資産および株式 A, B への投資額を w_0, w_A, w_B とするとき, 最小分散ポートフォリオを導出するための最適化問題を示せ。ただし, 投資家の要求リターンを μ とし, $w_0 + w_A + w_B = 1$ とする。
 - (2) 株式 A, B および無リスク資産について, $\mu_A = 8\%$, $\mu_B = 4\%$, $\sigma_A = 0.2$, $\sigma_B = 0.1$, $\rho_{AB} = -0.5$, $r = 3\%$ が与えられたとする。ここで, ρ_{AB} は, R_A, R_B の相関係数を表す。投資家の要求リターンを $\mu = 5\%$ とする最小分散ポートフォリオを求めよ。
2. 現在 (時刻 0), 満期 1 年の A 株先渡価格は 1 株 100 円である。また, 満期 1 年の割引債 (額面 100 円) の価格は 95 円である。
 - (1) 先渡価格から導かれる A 株の現在の理論株価はいくらか?
 - (2) 現在, A 株現物株価が 1 株 96 円なので裁定取引が可能である。どのようにすれば良いか? また, 必要な仮定があれば追加せよ。

問題 II. 以下の 1, 2 のすべてに答えなさい。

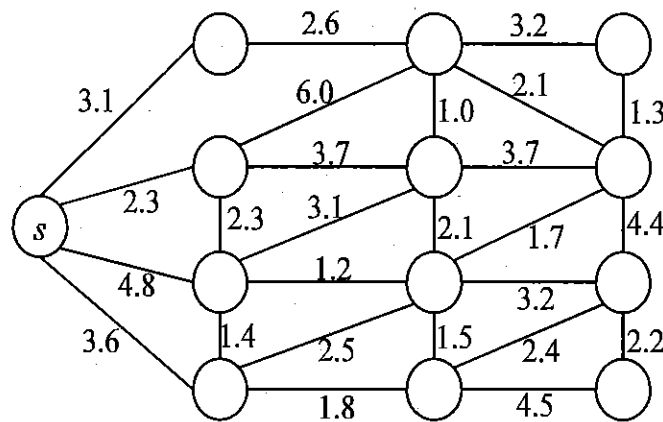
1. つぎの整数計画問題 (IP) の各変数の制約を $0 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, 8$) に線形緩和した問題 (P) の最適解および最適値を求めなさい。

$$\begin{aligned} \text{(IP)} \quad & \max \quad 3x_1 + 15x_2 + 80x_3 + 60x_4 + 30x_5 + 100x_6 + 10x_7 + 15x_8 \\ & \text{subject to:} \\ & \quad 3x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 30x_4 + 40x_5 + 20x_6 + 60x_7 + 10x_8 \leq 85 \\ & \quad x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, 8 \end{aligned}$$

2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ は (IP) の実行可能解である. (IP) において, この解の近似比を評価しなさい.

問題 III.

次の無向グラフにおいて, 点 s からの最短路木を求めなさい. ただし, 各辺に付されている数値は, その辺の長さを表す.



Answer the following three questions, Question I, Question II, and Question III.

Question I. Answer all the following questions.

- Portfolio selection is performed in a market where only stock A, stock B, and risk-free assets exist. Let r be the deterministic rate of return on a risk-free asset over a period of time. In addition, the returns of stocks A and B are represented by random variables R_A, R_B , and their expected values are $E[R_A] = \mu_A$, $E[R_B] = \mu_B$, their variances are $V[R_A] = \sigma_A^2$, $V[R_B] = \sigma_B^2$, and their covariances are $Cov[R_A, R_B] = \sigma_{AB}$.

- (1) Given w_0, w_A, w_B as investments in risk-free assets and stocks A and B, present an optimization problem to derive the minimum variance portfolio. Let the investor's required return be μ and $w_0 + w_A + w_B = 1$.

- (2) For stocks A, B and risk-free assets, let $\mu_A = 8\%$, $\mu_B = 4\%$, $\sigma_A = 0.2$, $\sigma_B = 0.1$, $\rho_{AB} = -0.5$, $r = 3\%$, where ρ_{AB} represents the correlation coefficient of R_A, R_B . Find the minimum variance portfolio with the investor's required return of $\mu = 5\%$.
2. At present (time 0), the A-share forward price with a maturity of 1 year is 100 yen per share. Also, the price of a discount bond (100 yen face value) with a maturity of 1 year is 95 yen.
- (1) What is the current theoretical price of A-share derived from the forward price?
- (2) Currently, an arbitrage trading is possible because the stock price of A-share is 96 yen per share. How do you do to gain a profit from the arbitrage trading? Also, add any necessary assumptions.

Question II. Answer all the following questions.

1. Let (P) denote the problem obtained from the following integer programming problem (IP) by replacing binary constraints $x_i \in \{0, 1\}$ with linear constraints $0 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, 8$). Find an optimal solution to (P) and the optimal value for (P).

$$\begin{aligned} \text{(IP) max} \quad & 3x_1 + 15x_2 + 80x_3 + 60x_4 + 30x_5 + 100x_6 + 10x_7 + 15x_8 \\ \text{subject to:} \quad & \end{aligned}$$

$$3x_1 + 30x_2 + 30x_3 + 30x_4 + 40x_5 + 20x_6 + 60x_7 + 10x_8 \leq 85$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, 8$$

2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ is a feasible solution to (IP). Analyze the approximation ratio of this solution to (IP).

Question III.

Find a shortest path tree from the vertex s in the following undirected graph, where the value attached to each edge in the graph represents its edge length.

