北海道大学大学院経済学院
修士課程（博士コース，専修コース）入学試験

令和７年度　学科試験　試験問題

試験期日：令和７年１月２９日
試験時間：９時００分～１０時３０分

**解答上の注意**

１．試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはならない．

２．問題は，

| | |
|---|---|
| マクロ及びミクロ経済学 | １～４ページ |
| 経済思想 | ５ページ |
| 経済史 | ６ページ |
| 統計学 | ７～１３ページ |
| 経営学 | １４ページ |

である．

３．問題冊子の中から出願時に選択した科目について解答しなさい．

４．受験番号，氏名，選択科目は，監督員の指示にしたがって解答用紙の指定された箇所に記入しなさい．

５．解答用紙に解答する際に，問題番号・記号があれば解答の前に必ず記入しなさい．

６．文字は楷書体（ブロック体）で，濃くはっきりと記入しなさい．

７．解答用紙が不足した場合は挙手して監督員に連絡しなさい．

８．試験途中での試験場退出は，体調不良等を除き認めない．

**Graduate School of Economics and Business, Hokkaido University**
**Admission Examination for Master's Program**

**Exam Questions Booklet: Specialized Subject for 2025 intake**

Date of Exam: January 29, 2025
Time：9:00~10:30 a.m.

**Instructions**

1. Do not open this examination booklet until the signal for starting the test is given.
2. This booklet is composed of the following parts:

| | |
|---|---|
| Macroeconomics and Microeconomics | pp. 1~4 |
| Economic Thought | p. 5 |
| Economic History | p. 6 |
| Statistics | pp. 7~13 |
| Management and Business Administration | p. 14 |

3. Answer the question(s) of the subject you selected and reported upon the application.
4. Write your examinee's number, your name, and the subject in the specified place, following the instructions given by the proctor.
5. Be sure to indicate the question number of each question you answer.
6. Write darkly and clearly in block style.
7. Raise your hand to notify a proctor if you need more answer sheets.
8. Do not leave the examination room in the middle of the exam unless you are in sick or other emergency reasons.

# マクロ及びミクロ経済学 (Macroeconomics and Microeconomics)

日本語問題文(Japanese Version)
問題Ⅰ，問題Ⅱの両方に解答しなさい.

問題Ⅰ.

1. ある企業の生産関数が

$$Y = K^{0.5} \cdot L^{0.5}$$

で与えられるとする．ただし，Y は生産量，K は資本量，L は労働量である．生産物と資本の価格は共に1で，資本のレンタルコストは0.1，賃金率を$w$とする．

（1）この企業が利潤を最大化した際の，資本労働比率$\frac{K}{L}$及び賃金率を求めよ．

（2）この企業の前期の資本量が 50 で，生産物の需要量が Y=10 のとき，利潤を最大化する今期の投資額を求めよ．ただし，資本減耗率は0とする．

2. すべての個人が若年期と老年期の２期間に渡って生きる世代重複経済を考える．任意の$t$期において，$t$期に産まれた若年世代と$t-1$期に産まれた老年世代が存在する．$t$期における若年世代の個人の効用関数は

$$U_t = C_{Y,t} \cdot C_{O,t+1}$$

で与えられる．ここで，$C_{Y,t}$はこの個人の$t$期（若年期）における消費額，$C_{O,t+1}$はこの個人の$t+1$期（老年期）における消費額である．この個人の若年期における貯蓄額を$S_t$とする．すべての個人は若年期のみに所得を$Y>0$だけ稼ぎ，生涯において全て資産を自ら消費する．

この経済には若年世代期の個人から$T>0$だけ保険料を徴収し，徴収した保険料の全てを同じ期間に生きる老年期の個人に配分するような，賦課方式年金制度が存在する．

人口成長率は0，各世代の人口は1，貯蓄の利子率は$r>0$とする．

（１）$t$期に産まれた個人について，効用を最大化する$C_{Y,t}$の水準を求めよ．

（２）$T$の上昇は，効用を最大化する$C_{Y,t}$の水準にどのような影響を与えるか示せ．ただし，$Y > T > 0$とする．

問題Ⅱ

ある個人の効用は，財の消費量$x$と貨幣保有量$M$に依存し，次の関数で与えられる

$$U = 412x - \frac{x^2}{2} + M\,.$$

財の価格を$p > 0$，個人の所得を$I > 0$とすると，予算制約式は以下で与えられる

$$I = M + px.$$

一方，財を$x$単位生産する企業の費用関数が以下で与えられる

$$C = \frac{x^2}{2} + 12x.$$

企業と個人はプライステーカーとして行動するとする．

（１）市場均衡における財の価格と数量を求めよ．

（２）市場均衡における消費者余剰，生産者余剰，社会的余剰を求めよ．

（３）政府が企業に対し，財の生産量一単位につき 10（円）の環境税を課すとする．この環境税による社会的余剰の損失，税金の消費者負担と企業負担を求めよ．

（４）需要の価格弾力性が小さくなった場合，環境税における消費者・生産者負担はどのように変化するか．図を用いて説明せよ．

英語問題文(English Version)

Answer the following <u>two</u> questions, Question I and Question II.

Question I.

（１）Consider a firm with the following production function:

$$Y = K^{0.5} \cdot L^{0.5}$$

where $Y$ is the output, $K$ is the capital, and $L$ is the labor. The prices of both the output and capital are 1, the rental cost of capital is 0.1, and the wage rate is denoted by $w$.

1. Find the capital-labor ratio $\frac{K}{L}$ and the wage rate $w$ that maximize the firm's profit.

2. Assume the firm's capital in the previous period is 50 and the demand for output is $Y = 10$. Find the investment required to maximize the firm's profit in the current period. Assume the capital depreciation rate is 0.

(2) Consider an overlapping generations economy in which all individuals live through two periods: youth and old age. In each period $t$, there exists a generation born in period $t$ (the young generation) and a generation born in period $t-1$ (the old generation). The utility function of an individual born in period $t$ is given by

$$U_t = C_{Y,t} \cdot C_{O,t+1}$$

where $C_{Y,t}$ is the consumption of this individual in period $t$ (the youth period) and $C_{O,t+1}$ is the consumption in period $t+1$ (the old age period). Let $S_t$ denote the savings during the young period for this individual. Each individual earns income $Y > 0$ only during their youth period and consumes all their assets over their lifetime.

This economy has a pay-as-you-go pension system in which a young individual pays a pension fee $T > 0$, and the collected pension fee is distributed equally to the old individuals living in the same period.

The population growth rate is 0, the population of each generation is 1, and the interest rate on savings is $r > 0$.

1. For an individual born in period $t$, find the level of $C_{Y,t}$ that maximizes

their utility.

2. Show how an increase in $T$ affects the level of $C_{Y,t}$ that maximizes utility. Assume that $Y > T > 0$.

Question II.

The utility of an individual depends on the consumption $x$ and the accumulated amount of money $M$, expressed as: $U = 412x - \frac{x^2}{2} + M$.

Meanwhile, the individual has a fixed income $I > 0$ and consumes good $x$ at price $p > 0$. Individual's budget constraint is $I = M + px$.

A firm produces the consumption good, and the cost function of producing $x$ is given by: $C = \frac{x^2}{2} + 12x$. Both the firm and the individual act as price takers.

(1) Calculate the equilibrium price and quantity of $x$.

(2) Calculate the consumer surplus, producer surplus, and social surplus at equilibrium.

(3) Suppose the government imposes an environmental tax of $10$ (yen) per unit of production of $x$. Calculate the loss of social surplus due to the tax, and the tax burden on the consumer and producer.

(4) Discuss how the consumer and producer burden of the environmental tax changes when the price elasticity of demand decreases. Explain with a diagram.

# 経済思想(Economic Thought)

日本語問題文(Japanese Version)

問題Ｉ，問題Ⅱの<u>両方に</u>解答しなさい．

問題Ｉ．Ｄ．ヒュームの経済思想について自由に論じなさい．

問題Ⅱ．Ｊ．シュンペーターの学問的功績について説明しなさい．

英語問題文(English Version)

Answer the following <u>two</u> questions, Question I and Question II.

Question I. Explain D. Hume's idea on economic thought.

Question II. Explain J. Schumpeter's scholarly contributions.

## 経済史 (Economic History)

問題 I～IV の中から2問を選んで解答しなさい.

Answer the two of the following four questions, Question I ～ Question IV.

問題 I. 近世におけるスペインおよびポルトガルの経済史的な役割について論述しなさい.

Question I. Explain the economic historical roles of Spain and Portugal in the early modern period.

問題 II. 産業革命期における日本の産業発展について，特定の産業を取り上げて論述しなさい.

Question II. Explain the industrial development of Japan during the Industrial Revolution, focusing on a specific industry.

問題 III. 日本型雇用システムの成立過程の歴史について論述しなさい.

Question III. Explain the history of the formation process of the Japanese-style employment system.

問題 IV. 第二次世界大戦後の国際援助について，マーシャル・プランを中心に論述しなさい.

Question IV. Explain international aid after World War II, focusing on the Marshall Plan.

## 統計学 (Statistics)

問題I，問題IIのうちいずれか1題，及び，問題III，問題IVのうちいずれか1題の合計2題を選んで解答しなさい．

問題I.　互いに独立な確率変数 $X_1, X_2, X_3$ は同一の確率密度関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つとする．また，確率変数 $Y_1, Y_2, Y_3$ を以下のように定義する．

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad Y_3 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}$$

1．$Y_1$ の平均 $E(Y_1)$ の値を求めなさい．

2．$Y_2$ の平均 $E(Y_2)$ の値を求めなさい．

3．$Y_1, Y_2, Y_3$ の同時確率密度関数を求めなさい．

4．$Y_1, Y_2, Y_3$ が互いに独立であるかを調べなさい．

問題II.　以下の全ての設問に答えなさい．

1．$a, \lambda$ を正の実数とする．ガンマ分布とは，次の密度関数

$$f_{\mathrm{Gam}}(t) = \begin{cases} c_1 t^{a-1} e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

を持つ確率分布のことであり，$\mathrm{Gam}(a, \lambda)$ と記す．

(1) ガンマ関数 $\Gamma(a)$ の定義式を書きなさい．また，$f_{\mathrm{Gam}}$ が密度関数となるように定数 $c_1$ を定めなさい．

(2) $X \sim \mathrm{Gam}(a, \lambda)$ とする．正の実数 $b$ に対し $E(X^b)$ を求めなさい．

(3) 正の実数 $b$ に対し，

$$f_b(t) = \begin{cases} c_2 t^b f_{\mathrm{Gam}}(t), & t > 0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

が密度関数となるように定数 $c_2$ を定めなさい．また，その密度関数を持つ確率分布の名称を答えなさい．

2．$\mu$ を実数，$\sigma^2$ を正の実数とする．

（1）正規分布 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の密度関数 $p$ の定義式を書きなさい．

（2）$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ について積率母関数 $E(e^{\theta X})$ を求めなさい．ただし，$\theta$ を実数とする．

3．$\mu$ を実数，$\sigma^2$ を正の実数とする．対数正規分布とは，次の密度関数

$$f_{\mathrm{LN}}(t) = \begin{cases} \dfrac{c_3}{t} e^{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & t > 0, \\ 0, & その他 \end{cases}$$

を持つ確率分布のことであり，$\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$ と記す．

（1）$f_{\mathrm{LN}}$ が密度関数となるように定数 $c_3$ を定めなさい．

（2）$Y \sim \mathrm{LN}(0, \sigma^2), X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ に対し $E(Y^b) = E(e^{bX})$ を示しなさい．ただし，$b$ を実数とする．

（3）$g$ を $\mathrm{LN}(0, \sigma^2)$ の密度関数とする．正の実数 $b$ に対し，

$$g_b(t) = \begin{cases} c_4 t^b g(t), & t > 0, \\ 0, & その他 \end{cases}$$

が密度関数となるように定数 $c_4$ を定めなさい．また，その密度関数を持つ確率分布の名称を答えなさい．

問題 III．3 変量 $x, y_1, y_2$ についてのデータ $(x_i, y_{1i}, y_{2i}),\ i = 1, \ldots, n$ に対し，$x$ を説明変数，$y_1$ を被説明変数とする単回帰モデル

$$y_{1i} = \alpha_1 + \beta_1 x_i + \epsilon_{1i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

を考える．ただし，$\alpha_1, \beta_1$ を回帰係数とし，$\epsilon_{1i}$ を誤差項とする．同様に，$x$ を説明変数，$y_2$ を被説明変数とする単回帰モデル

$$y_{2i} = \alpha_2 + \beta_2 x_i + \epsilon_{2i}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

を考える．ただし，$\alpha_2, \beta_2$ を回帰係数とし，$\epsilon_{2i}$ を誤差項とする．

1．単回帰モデル (1) において，$\alpha_1, \beta_1$ の最小二乗推定量がそれぞれ，次式により与えられることを示しなさい．

$$\widehat{\alpha}_1 = \overline{y}_1 - \widehat{\beta}_1 \overline{x}, \quad \widehat{\beta}_1 = \frac{S_{x1}}{S_{xx}}$$

ただし，$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$，$\overline{y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_{1i}$，$S_{x1} = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_{1i} - \overline{y}_1)$，$S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$ とする．

2．単回帰モデル (1) における残差を $u_{1i} = y_{1i} - \widehat{\alpha}_1 - \widehat{\beta}_1 x_i$，$i = 1, \ldots, n$ とおくとき，次式が成り立つことを示しなさい．

$$\sum_{i=1}^{n} u_{1i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} u_{1i}^2 = (1 - R_{x1}^2) S_{11}$$

ただし，$S_{11} = \sum_{i=1}^{n} (y_{1i} - \overline{y}_1)^2$，$R_{x1} = S_{x1} / \sqrt{S_{xx} S_{11}}$ とする．

3．単回帰モデル (2) における $\alpha_2, \beta_2$ の最小二乗推定量をそれぞれ $\widehat{\alpha}_2, \widehat{\beta}_2$ とし，残差を $u_{2i} = y_{2i} - \widehat{\alpha}_2 - \widehat{\beta}_2 x_i$，$i = 1, \ldots, n$ とおく．次式が成り立つことを示しなさい．

$$\sum_{i=1}^{n} u_{1i} u_{2i} = S_{12} - \frac{S_{x1} S_{x2}}{S_{xx}}$$

ただし，$\overline{y}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_{2i}$，$S_{12} = \sum_{i=1}^{n} (y_{1i} - \overline{y}_1)(y_{2i} - \overline{y}_2)$，$S_{x2} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_{2i} - \overline{y}_2)$ とする．

4．次式が成り立つことを示しなさい．

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} u_{1i} u_{2i}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} u_{1i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} u_{2i}^2\right)}} = \frac{R_{12} - R_{x1} R_{x2}}{\sqrt{(1 - R_{x1}^2)(1 - R_{x2}^2)}}$$

ただし，$S_{22} = \sum_{i=1}^{n} (y_{2i} - \overline{y}_2)^2$，$R_{12} = S_{12} / \sqrt{S_{11} S_{22}}$，$R_{x2} = S_{x2} / \sqrt{S_{xx} S_{22}}$ とする．

問題 IV.　重回帰モデル

$$[\mathrm{M}] \quad Y_i = c + x_{i1}\beta_1 + \cdots + x_{ik}\beta_k + U_i\,, \quad i = 1, \ldots, n$$

を考える．ここに，説明変数は非確率的な変数であり，誤差項 $U_i$ は標準的仮定を満たす．

1．重回帰モデル [M] を次のように行列・ベクトル表示して

$$Y = \mathrm{X}\theta + U$$

と書く．ここに，$\theta = (c, \beta_1, \ldots, \beta_k)'$ とする．このとき，$n \times (k+1)$ 計画行列 X，$n \times 1$ 観測ベクトル $Y$，$n \times 1$ 誤差ベクトル $U$ を与えなさい．

2．$n \times n$ 行列 $\mathrm{P}_X = \mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'$ を考える．ここに，$\mathrm{X}'\mathrm{X}$ は正則であるとする．以下を示しなさい．

$$\mathrm{P}_X \mathrm{X} = \mathrm{X}, \quad \mathrm{P}_X' = \mathrm{P}_X, \quad (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)' = \mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X,$$

$$\mathrm{P}_X \mathrm{P}_X = \mathrm{P}_X, \quad (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)(\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X) = (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)$$

ただし，$\mathrm{I}_n$ を $n \times n$ 単位行列とする．

３．ベクトル$v$のノルムを$||v|| = \sqrt{v'v}$とする．

（１）次を示しなさい．

$$Y - \mathrm{X}\theta = (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)Y - \mathrm{X}\{\theta - (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'Y\}$$

（２）次を示しなさい．

$$||Y - \mathrm{X}\theta||^2 = Y'(\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)Y + ||\mathrm{X}\{\theta - (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'Y\}||^2$$

（３）（２）の意味することを簡潔に説明しなさい．

４．最小２乗推定量の性質を考えたい．

（１）誤差項$U_i$に関する標準的仮定を簡潔に説明しなさい．

（２）BLUEの３つの頭文字L，U，Bの意味を簡潔に説明しなさい．

（３）誤差項$U_i$に関する標準的仮定が崩れたときにどのような問題が生じるかを簡潔に説明しなさい．

Choose <u>either</u> of Question I and Question II, and choose <u>either</u> of Question III and Question IV.

Question I. Let $X_1, X_2, X_3$ be independent random variables having the same probability density function

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}, \quad Y_3 = \frac{X_1 + X_2}{X_1 + X_2 + X_3}.$$

1. Derive the expectation $E(Y_1)$.
2. Derive the expectation $E(Y_2)$.
3. Derive the joint probability density function of $Y_1, Y_2, Y_3$.
4. Discuss whether $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ are independent or not.

Question II. Answer all questions in Question II.

1. Let $a$ and $\lambda$ be positive real numbers. The gamma distribution, denoted by $\mathrm{Gam}(a, \lambda)$, has the density in the form

$$f_{\mathrm{Gam}}(t) = \begin{cases} c_1 t^{a-1} e^{-\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(1) Give the definition of the gamma function $\Gamma(a)$, and determine the constant $c_1$ such that $f_{\mathrm{Gam}}$ is a density on $(0, \infty)$.

(2) For a positive real number $b$, find $E(X^b)$, where $X \sim \mathrm{Gam}(a, \lambda)$.

(3) For a positive real number $b$, determine the constant $c_2$ such that

$$f_b(t) = \begin{cases} c_2 t^b f_{\mathrm{Gam}}(t), & t > 0, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

is a density on $(0, \infty)$. What is the name of the distribution having density $f_b$?

2. Let $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma^2 > 0$ be real numbers.

(1) Give the definition of the density $p$ of the normal distribution $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

(2) Find the moment generating function $E(e^{\theta X})$ of $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Here, $\theta$ is a real number.

3. Let $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma^2 > 0$ be real numbers. The lognormal distribution, denoted by $\mathrm{LN}(\mu, \sigma^2)$, has the density in the form

$$f_{\mathrm{LN}}(t) = \begin{cases} \dfrac{c_3}{t} e^{-\frac{(\log t - \mu)^2}{2\sigma^2}}, & t > 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(1) Determine the constant $c_3$ such that $f_{\mathrm{LN}}$ is a density on $(0, \infty)$.

(2) Let $Y \sim \mathrm{LN}(0, \sigma^2)$ and $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Show that $E(Y^b) = E(e^{bX})$, where $b$ is a real number.

(3) Let $g$ be a density of $Y \sim \mathrm{LN}(0, \sigma^2)$. For a positive real number $b$, determine the constant $c_4$ such that

$$g_b(t) = \begin{cases} c_4 t^b g(t), & t > 0, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

is a density on $(0, \infty)$. What is the name of the distribution having density $g_b$?

Question III. Consider the trivariate data $(x_i, y_{1i}, y_{2i})$, $i = 1, \ldots, n$. Assume a simple regression model with the independent variable $x$ and the dependent variable $y_1$, i.e.,

$$y_{1i} = \alpha_1 + \beta_1 x_i + \epsilon_{1i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

where $\alpha_1, \beta_1$ are regression coefficients, and $\epsilon_{1i}$, $i = 1, \ldots, n$, are error terms. Similarly, assume a simple regression model with the independent variable $x$ and the dependent variable $y_2$, i.e.,

$$y_{2i} = \alpha_2 + \beta_2 x_i + \epsilon_{2i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

where $\alpha_2, \beta_2$ are regression coefficients, and $\epsilon_{2i}$, $i = 1, \ldots, n$, are error terms.

1. In the regression model (1), show that the least squares estimators for $\alpha_1$ and $\beta_1$ are, respectively, given by

$$\widehat{\alpha}_1 = \overline{y}_1 - \overline{\beta}_1 \overline{x} \quad \text{and} \quad \widehat{\beta}_1 = \frac{S_{x1}}{S_{xx}},$$

where $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $\overline{y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_{1i}$, $S_{x1} = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_{1i} - \overline{y}_1)$, $S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$.

2. In the regression model (1), let $u_{1i} = y_{1i} - \widehat{\alpha}_1 - \widehat{\beta}_1 x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Show that

$$\sum_{i=1}^n u_{1i} = 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^n u_{1i}^2 = (1 - R_{x1}^2) S_{11},$$

where $S_{11} = \sum_{i=1}^n (y_{1i} - \overline{y}_1)^2$, $R_{x1} = S_{x1}/\sqrt{S_{xx} S_{11}}$.

3. In the regression model (2), let $\widehat{\alpha}_2$ and $\widehat{\beta}_2$ be the least squares estimators for $\alpha_2$ and $\beta_2$, respectively, and let $u_{2i} = y_{2i} - \widehat{\alpha}_2 - \widehat{\beta}_2 x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Show that

$$\sum_{i=1}^n u_{1i} u_{2i} = S_{12} - \frac{S_{x1} S_{x2}}{S_{xx}},$$

where $\overline{y}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_{2i}$, $S_{12} = \sum_{i=1}^n (y_{1i} - \overline{y}_1)(y_{2i} - \overline{y}_2)$, $S_{x2} = \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_{2i} - \overline{y}_2)$.

4. Show that

$$\frac{\sum_{i=1}^n u_{1i} u_{2i}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n u_{1i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^n u_{2i}^2\right)}} = \frac{R_{12} - R_{x1} R_{x2}}{\sqrt{(1 - R_{x1}^2)(1 - R_{x2}^2)}},$$

where $S_{22} = \sum_{i=1}^n (y_{2i} - \bar{y}_2)^2$, $R_{12} = S_{12}/\sqrt{S_{11} S_{22}}$, $R_{x2} = S_{x2}/\sqrt{S_{xx} S_{22}}$.

Question IV. Consider a multiple regression model

$$[\mathrm{M}]\quad Y_i = c + x_{i1}\beta_1 + \cdots + x_{ik}\beta_k + U_i\,, \quad i = 1, \ldots, n,$$

where the explanatory variables are non-stochastic, and the error $U_i$ satisfies the standard assumptions.

1. Rewrite the model [M] in a matrix and vector form, as follows:

$$Y = \mathrm{X}\theta + U,$$

where $\theta = (c, \beta_1, \ldots, \beta_k)'$ is an unknown parameter to be estimated. Then, what are the definitions of $n \times (k+1)$ design matrix X, $n \times 1$ observed vector $Y$, and $n \times 1$ error vector $U$?

2. Suppose that X′X is non-singular. Let $\mathrm{P}_X = \mathrm{X}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'$ be an $n \times n$ matrix, and let $\mathrm{I}_n$ be an $n \times n$ identity matrix. Show that

$$\mathrm{P}_X\mathrm{X} = \mathrm{X}, \quad \mathrm{P}_X' = \mathrm{P}_X, \quad (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)' = \mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X,$$

$$\mathrm{P}_X\mathrm{P}_X = \mathrm{P}_X, \quad (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)(\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X) = (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X).$$

3. For any vector $v$, $||v|| = \sqrt{v'v}$ stands for the norm of the vector $v$.

(1) Show that

$$Y - \mathrm{X}\theta = (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)Y - \mathrm{X}\{\theta - (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'Y\}.$$

(2) Show that

$$||Y - \mathrm{X}\theta||^2 = Y'(\mathrm{I}_n - \mathrm{P}_X)Y + ||\mathrm{X}\{\theta - (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}'Y\}||^2.$$

(3) What is an implication of (2)?

4. Consider the statistical properties of the least squares estimator for $\theta$.

(1) Explain the standard assumptions on the error $U_i$.

(2) Explain the three initial letters L, U, and B in "BLUE".

(3) Explain what happens, if some of the standard assumptions on the error $U_i$ are violated.

## 経営学

## (Management and Business Administration)

日本語問題文(Japanese Version)

問題Ⅰ，問題Ⅱの両方に解答しなさい.

問題Ⅰ.「イノベーター(イノベーション)のジレンマ」について説明しなさい.

問題Ⅱ. 組織における意思決定について，個人による意思決定と対比させながら説明しなさい.

英語問題文(English Version)

Answer the following two questions, Question I and Question II.

Question I. Explain “Innovator’s Dilemma”.

Question II. Explain organizational decision making compared to individual decision making.